R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 11 (Lösung)

Ausgabedatum: 24. Juni 2024
Abgabedatum: 1. Juli 2024

Hausaufgabe II-11.1 (Zu quadratischen Formen und Räumen) 3 + 1 + 2 + 3 = 9 Punkte

(a) Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie Lemma 32.2, also dass $\mathrm{QF}(V)$ ein Unterraum des Vektorraumes K^V ist.

(b) Bestimmen Sie die von der Bilinearform aus Hausaufgabe II-10.3 induzierte quadratische Form.

(c) Bestimmen Sie diejenige symmetrische Bilinearform, welche die quadratische Form $\mathbb{R}[t] \ni p \mapsto \widetilde{p}(0)\widetilde{p}(1) \in \mathbb{R}$ induziert.

(d) Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und (V, γ_1) sowie (W, γ_2) quadratische Räume über K. Zeigen Sie Lemma 33.9, also dass wenn $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus quadratischer Räume ist, dann ist es auch f^{-1}. Zeigen Sie außerdem, dass für $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}$ dann $\mathrm{Rang}(\gamma_1) = \mathrm{Rang}(\gamma_2)$ gilt.

Lösung.

(a) Wir verwenden das Unterraumkriterium. Die Nullabbildung ist offensichtlich eine quadratische Form auf V, damit ist $\mathrm{QF}(V)$ nicht leer. (1 Punkt)

Weiterhin ist für $\alpha, \beta \in K$ und $q_1, q_2 \in \mathrm{QF}(V)$ und beliebige $v \in V$:

$$(\alpha q_1 + q_2)(\beta v) = \alpha q_1(\beta v) + q_2(\beta v) = \beta^2(\alpha q_1(v) + q_2(v)) = \beta^2(\alpha q_1 + q_2)(v).$$

(1 Punkt)

Zudem ist

$$V \times V \ni (u, v) \mapsto (\alpha q_1 + q_2)(u + v) - (\alpha q_1 + q_2)(u) - (\alpha q_1 + q_2)(v)$$

$$= \alpha(q_1(u+v) - q_1(u) - q_1(v)) + (q_2(u+v) - q_2(u) - q_2(v))$$

und da die bilinearen Abbildungen $\operatorname{Bil}(V \times V; K)$ nach Hausaufgabe II-3.3 einen Vektorraum bilden, ist auch diese Abbildung bilinear. (1 Punkt)

(b) Die induzierte quadratische Form finden wir nach Lemma 32.3 gerade durch Auswertung der Bilinearform auf der Diagonalen, also für $A \in \mathcal{P}([\![1,4]\!])$ ist gerade

$$q_\gamma(A) = \gamma(A, A) = \#(A \cap A) \mod 2 = \#A \mod 2,$$

also gerade die Abbildung, welche angibt, ob eine gerade oder ungerade Anzahl von Elementen in der Menge liegen. Sie stimmt also mit der Linearform aus Hausaufgabe II-1.1 überein. Hier ist die quadratische Form also auch eine Linearform. (1 Punkt) **Beachte:** Über Z_2 ist sogar jede Linearform eine quadratische Form. Die Zusammenhänge in diesem Sonderfall sind ebenfalls interessant und werden potentiell in der Plenarübung noch abgehandelt.

(c) Die eine quadratische Form induzierende symmetrische Bilinearform finden wir gerade über die Polarisierungsformel Gleichung (32.5), also als die Abbildung

$$\begin{aligned} K[t] \times K[t] \ni (p,q) \mapsto & \frac{1}{2}\left((p+q)(0)(p+q)(1) - p(0)p(1) - q(0)q(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((p(0)+q(0))(p(1)+q(1)) - p(0)p(1) - q(0)q(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(p(0)p(1) + p(0)q(1) + p(1)q(0) + q(0)q(1) - p(0)p(1) - q(0)q(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(p(0)q(1) + p(1)q(0)\right) \end{aligned}$$

also gerade die symmetrisierte Form der nicht-symmetrischen Bilinearform aus Beispiel 31.1 (*iv*). (2 Punkte)

(d) Der Beweis geht analog zu den bisher für Strukturisomorphismen verwendeten Beweisen. Dass die inversen Abbildungen zu linearen Bijektionen wieder linear sind haben wir in Hausaufgabe I-12.1 bereits gesehen. (1 Punkt)

Weiterhin ist

$$\gamma_1(f^{-1}(v), f^{-1}(w)) = \gamma_2(f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w))) = \gamma_2(v,w) \quad \text{für alle } v, w \in W.$$

(1 Punkt)

Bezüglich beliebiger Basen B_V und $B_W := f(B_V)$ von V respektive W gilt weiterhin, dass

$$\mathcal{M}^{B_V}_{B_V^*}(\gamma_1) = \mathcal{M}^{B_V}_{B_V^*}(\gamma_2(f(\cdot), f(\cdot))) = \mathcal{M}^{B_W}_{B_W^*}(\gamma_2)$$

und damit die Gleichheit der Ränge der Bilinearformen. (1 Punkt)

Hausaufgabe II-11.2 (Orthogonalität) 3 + 3 = 6 Punkte

(a) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie Satz 34.19, also dass Algorithmen 34.17 und 34.18 aus einer linear unabhängigen Familie $(u_1, \ldots, u_k)$ von V eine orthogonale Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von V mit der Eigenschaft $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ für alle $j = 1, \ldots, k$ generieren.

(b) Es sei $M \coloneqq \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens in $(\mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto x^\mathsf{T} M y)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung.

(a) Wir zeigen die Aussage per Induktion über die Anzahl der Elemente in der Familie. Den Fall der Orthonormalisierung müssen wir nicht separat untersuchen, denn hier werden die Vektoren nur mit Skalaren aus $K \setminus \{0\}$ skaliert.

Für $k = 1$ ist die Aussage klar, da die Summe hier zu 0 zusammenfällt und damit $u_1 = v_1$ gesetzt wird. Diese Familie ist trivialerweise orthogonal.

Sei nun eine linear unabhängige Familie $(v_1, \ldots, v_{k+1})$ gegeben. Auf Grund der sequentiellen Gestalt der Gram-Schmidt Orthogonalisierung entsprechen die ersten k-Schritte der Gram-schmidt Orthogonalisierung für die Teilfamilie $(v_1, \ldots, v_k)$. Die Familie $(u_1, \ldots, u_k)$ ist also orthogonal und $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ für alle $j = 1 \ldots k$. Im nächsten Schritt der Gram-Schmidt Orthogonalisierung wird diese Familie nun erweitert um

$$u_{k+1} \coloneqq v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma(v_{k+1}, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} u_i.$$

Dabei gilt dann für $j = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} \gamma(u_{k+1}, u_j) &= \gamma\left(v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma(v_{k+1}, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} u_i, u_j\right) \\ &= \gamma(v_{k+1}, u_j) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma(v_{k+1}, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} \gamma(u_i, u_j) \\ &= \gamma(v_{k+1}, u_j) - \frac{\gamma(v_{k+1}, u_j)}{\gamma(u_j, u_j)} \gamma(u_j, u_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da $(u_1, \ldots, u_k)$ orthogonal ist, nach Induktionsvoraussetzung. (2 Punkte)

Es verbleibt Erzeugendeneigenschaft zu zeigen. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ für alle $j = 1 \ldots k$. Es verbleibt diese Aussage für $j = k + 1$ zu zeigen. Es genügt dafür zu zeigen, dass $v_{k+1} \in \langle u_1, \ldots, u_{k+1} \rangle$, das ist auf Grund der Definition aber klar, denn genau so ist das Objekt ja konstruiert. (1 Punkt)

Beachte: Hier sieht man dass der Orthogonalisierungsprozess im wesentlichen unabhängig von der Innenprodukteigenschaft von γ und von dem zugrunde liegenden Körper ist. Um Gram-Schmidt Orthogonalisierung durchführen zu können ist $\gamma(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ hinreichend, denn dann können wir den Nenner bilden.

(b) Wir starten mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) und orthonormalisieren diese Basis nach dem Gram-Schmidt Verfahren.

Entsprechend ist

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|_M} = \frac{e_1}{\sqrt{e_1^\mathsf{T} M e_1}} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)^\mathsf{T}.$$

Im nächsten Schritt folgt ohne Normierung zuerst

$$u_2 = e_2 - \underbrace{e_2^\mathsf{T} M u_1}_{0} u_1 = e_2$$

und damit nach Normierung

$$u_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|_M} = \frac{e_2}{\sqrt{e_2^\mathsf{T} M e_2}} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)^\mathsf{T}.$$

Hier sieht man, dass e_1 und e_2 schon „zufällig" orthogonal im M-Innenprodukt waren, aber noch nicht normiert.

Im letzten Schritt bestimmen wir vorerst ohne Normierung

$$u_2 = e_3 - e_3^\mathsf{T} M u_1 u_1 - e_3^\mathsf{T} M u_2 u_2 = e_3 - \frac{1}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 = e_3 - u_1 - u_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^\mathsf{T}$$

und stellen fest, dass diese Vektor zum Glück schon normiert ist. Die sich aus dem Verfahren ergebende Orthonormalbasis ist also

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

Hausaufgabe II-11.3 (Verallgemeinerte orthogonale Projektion) 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

Sei (V, γ) ein euklidischer Raum. Sei weiterhin U ein Unterraum mit mit Orthogonalbasis $(u_1, \dots, u_m)$ für $m \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{proj}_U^\gamma \colon V \ni v \mapsto \operatorname{proj}_U^\gamma(v) := \sum_{k=1}^m \frac{\gamma(v, u_k)}{\gamma(u_k, u_k)} u_k \in U$$

eine (bzgl. Definition 34.15) verallgemeinerte Projektion auf den Unterraum U ist.

(b) Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_U^\gamma) \oplus \operatorname{Kern}(\operatorname{proj}_U^\gamma) = U \oplus U^\perp$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\gamma\left(v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v), v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v)\right) \le \gamma(v - u, v - u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Was bedeutet im Sinne der induzierten Norm?

Lösung.

(a) Wohldefiniert ist die Abbildung, da sie auf eine Linearkombination der Orthonormalbasis von U abbildet und damit nach U. Sie ist außerdem eine Verallgemeinerung von der Projektion auf einen eindimensionalen Unterraum, da in diesem Fall die Summe genau einen Summanden hat und dieser die entsprechende Form hat. (1 Punkt)

Weiterhin ist wegen der Orthogonalität der u_k

$$\operatorname{proj}_U^\gamma(\operatorname{proj}_U^\gamma(v)) = \sum_{k=1}^m \frac{\gamma(\operatorname{proj}_U^\gamma(v), u_k)}{\gamma(u_k, u_k)} u_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\gamma(v, u_l)\gamma(u_l, u_k)}{\gamma(u_k, u_k)\gamma(u_l, u_l)} u_k = \operatorname{proj}_U^\gamma(v)$$

und die Abbildung damit tatsächlich eine Projektion. (1 Punkt)

(b) Die direkte Summeneigenschaft für Bild und Kern der Projektion folgt direkt aus Lemma 24.10 über Projektoren.

Zuerst zeigen wir nun, dass $\operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_U^\gamma) = U$ ist. Die Inklusion $\operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_U^\gamma) \subseteq U$ ist klar, da $\operatorname{proj}_U^\gamma$ auf eine Linearkombination von der u_k abbildet. Die Surjektivität folgt, da auf Grund der Orthogonalität der Basis für beliebige Elemente $\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$ gilt:

$$\operatorname{proj}_U^\gamma\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j\right) = \sum_{k=1}^m \frac{\gamma\left(\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j\right), u_k\right)}{\gamma(u_k, u_k)} u_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\gamma\left(u_j, u_k\right)}{\gamma(u_k, u_k)} u_k = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j.$$

Wir zeigen nun weiter, dass $\text{Kern}(\text{proj}_U^\gamma) = U^\perp$. Die Inklusion $\text{Kern}(\text{proj}_U^\gamma) \supseteq U^\perp$ ist offensichtlich da dann alle Linearkoeffizienten 0 sind. Ist $v \in \text{Kern}(\text{proj}_U^\gamma)$, dann muss auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren auch jeder der Koeffizienten Null sein und damit ist, wegen der Bilinearität von γ auch $v \in U^\perp$.

Das zeigt direkt, dass die direkte Summe orthogonal ist. (2 Punkte)

Für jedes $v \in V$ ist die Zerlegung in den U und den $U^\perp$ Anteil durch

$$v = v - \text{proj}_U^\gamma(v) + \text{proj}_U^\gamma(v)$$

gegeben, wobei offensichtlich $\text{proj}_U^\gamma(v) \in \text{Bild}(\text{proj}_U^\gamma)$ liegt und $v - \text{proj}_U^\gamma(v) \in \text{Kern}(\text{proj}_U^\gamma)$ aufgrund der Linearität und der Projektionseigenschaft von proj_U^γ.

Beachte: Bis hier ist die Aufgabe wieder nicht davon abhängig, dass γ ein Innenprodukt ist. Das wird erst in der letzten Teilaufgabe relevant werden.

(c) Da $\text{proj}_U^\gamma(v) - u \in U$ ist und wegen der Orthogonalität aus der letzten Teilaufgabe liefert der Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned}\gamma(v-u, v-u) &= \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v) + \text{proj}_U^\gamma(v) - u, v - \text{proj}_U^\gamma(v) + \text{proj}_U^\gamma(v) - u) \\ &= \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)) + \gamma(\text{proj}_U^\gamma(v) - u, \text{proj}_U^\gamma(v) - u) \\ &\geqslant \gamma(v - \text{proj}_U^\gamma(v), v - \text{proj}_U^\gamma(v)).\end{aligned}$$

Im Sinne der γ-induzerten Norm heißt das, dass die Projektion innerhalb von U den Abstand zu v minimiert. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-11.4 (Normierte Räume) 1 + 4 = 5 Punkte

(a) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass wenn $\|\cdot\|$ von einem Innenprodukt induziert ist, dann gilt

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

(b) Es sei $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ der Standardvektorraum über den reellen Zahlen. Entscheiden Sie, für welche Dimensionen n und $p \in [1, \infty)$ die Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

von Innenprodukten induziert sind, und skizzieren Sie die deren **Einheitssphären**

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p = 1\}$$

für $p = \{1, 2, \infty\}$ und $n = 2$.

Lösung.

(a) Wenn die Norm γ-induziert ist, dann rechnet man direkt mithilfe der Bilinearität nach, dass

$$\gamma(u+v, u+v) + \gamma(u-v, u-v) = 2\gamma(u,u) + 2\gamma(v,v) + 2\gamma(u,v) - 2\gamma(u,v) = 2\gamma(u,u) + 2\gamma(v,v)$$

gilt. (1 Punkt)

Beachte: Auch die Rückrichtung gilt, man erhält das passende Innenprodukt über die Polarisationsformel weil die Norm zum Quadrat dann eine quadratische Form ist. Der Beweis ist aber etwas aufwändiger.

(b) Für $n = 1$ stimmen alle angegebenen Normen mit dem Absolutbetrag überein, der von dem Innenprodukt $(u, v) \mapsto u \cdot v$ induziert wird.

Für $n > 1$ hingegen ist das im Allgemeinen nicht der Fall, hier ist im Fall der Maximumsnorm beispielsweise

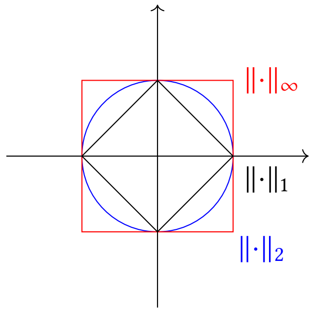
$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 + \left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 4 = 2\left(\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 + \left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty^2\right).$$

Mit den beiden gleichen Vektoren erhält man für $p \in [1, \infty)$, dass

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_p^2 + \left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 = 2\left(\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_p^2 + \left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_p^2\right)$$

genau dann gilt, wenn $p = 2$ ist. In diesem Fall erkennt man leicht, dass hier wieder das zugrunde liegende Innenprodukt durch $(x, y) \mapsto x^\mathsf{T} y$ gegeben ist. (2 Punkte)

Die Skizze der Einheitssphären ist



(2 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.