R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 10

Ausgabedatum: 17. Juni 2024
Abgabedatum: 24. Juni 2024

Hausaufgabe II-10.1 (Jordansche Normalform) 1 + 2 + 3 + 4 + 3 = 13 Punkte

(a) Geben Sie eine Matrix über einem Körper an, zu der keine Jordansche Normalform existiert. Erklären Sie Ihre Antwort knapp.

(b) Beschreiben Sie, wie aus den Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)^k$ eines Endomorphismus, für den eine Jordan-Normalform existiert, die Anzahl seiner Jordanblöcke verschiedener Größen berechnet werden können.

(c) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Gegeben sei die folgende Matrix in Jordan-Normalform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c|c}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_2 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \lambda_2 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \lambda_2
\end{array}\right] \in K^{13\times 13}.$$

Lesen Sie die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)^k$ ab und rekonstruieren Sie anhand Struktur der Matrix deren Minimal- und charakteristisches Polynom.

(d) Es sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und eine Matrix $A \in K^{10\times 10}$ gegeben, deren charakteristisches Polynom durch $(t-\lambda)^{10}$ ist. Geben Sie an, welche der unten stehenden Fälle auftreten können und geben Sie, wenn möglich, die Jordansche Normalform von A in den jeweiligen Fällen an oder beschreiben Sie, inwiefern die Form der Jordanschen Normalform festgelegt ist.

$\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I_{10} - A)^k)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Fall 1	1	2	3	4
Fall 2	10	10	10	10
Fall 3	4	6	8	9
Fall 4	3	5	6	9

(e) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und die dazugehörigen Transformationsmatrizen von

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Hausaufgabe II-10.2 (Ähnlichkeitscharakterisierung über Polynome) 1 + 3 + 1 = 5 Punkte

Es seien $n \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper sowie $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \le 1$ sind A und B genau dann ähnlich, wenn $\chi_A = \chi_B$.

(b) Für $n \le 3$ sind A und B genau dann ähnlich, wenn $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$.

(c) Für $n \geqslant 4$ kann $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ sein, ohne dass A und B ähnlich sind.

Hausaufgabe II-10.3 (Transformation von Bilinearformen) 1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte

Gegeben sei der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathcal{P}(⟦1, 4⟧), \triangle, \cdot)$ und die Bilinearform

$$\gamma\colon \mathcal{P}(⟦1,4⟧) \times \mathcal{P}(⟦1,4⟧) \to \mathbb{Z}_2, \qquad \gamma(A, B) \coloneqq \#(A \cap B) \mod 2$$

und die Basis $B \coloneqq (\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1\})$.

(a) Entscheiden Sie, ob γ selbstdual ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{B}_{B^*}(\gamma) \in Z_2^{4\times 4}$.

(c) Führen Sie eine Kongruenztransformation auf die Punktmengenbasis P durch.

(d) Bestimmen Sie den Rang der Bilinearform und entscheiden Sie, ob sie entartet ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.