R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 10 (Lösung)

Ausgabedatum: 17. Juni 2024
Abgabedatum: 24. Juni 2024

Hausaufgabe II-10.1 (Jordansche Normalform) 1 + 2 + 3 + 4 + 3 = 13 Punkte

(a) Geben Sie eine Matrix über einem Körper an, zu der keine Jordansche Normalform existiert. Erklären Sie Ihre Antwort knapp.

(b) Beschreiben Sie, wie aus den Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)^k$ eines Endomorphismus, für den eine Jordan-Normalform existiert, die Anzahl seiner Jordanblöcke verschiedener Größen berechnet werden können.

(c) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Gegeben sei die folgende Matrix in Jordan-Normalform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c|c}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_2 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \lambda_2 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \lambda_2
\end{array}\right] \in K^{13\times 13}.$$

Lesen Sie die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)^k$ ab und rekonstruieren Sie anhand Struktur der Matrix deren Minimal- und charakteristisches Polynom.

(d) Es sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und eine Matrix $A \in K^{10\times 10}$ gegeben, deren charakteristisches Polynom durch $(t-\lambda)^{10}$ ist. Geben Sie an, welche der unten stehenden Fälle auftreten können und geben Sie, wenn möglich, die Jordansche Normalform von A in den jeweiligen Fällen an oder beschreiben Sie, inwiefern die Form der Jordanschen Normalform festgelegt ist.

$\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I_{10} - A)^k)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Fall 1	1	2	3	4
Fall 2	10	10	10	10
Fall 3	4	6	8	9
Fall 4	3	5	6	9

(e) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und die dazugehörigen Transformationsmatrizen von

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Lösung.

(a) Die Jordansche Normalform existiert für jeden Endomorphismus/jede Matrix deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, der Körper darf also nicht algebraisch abgeschlossen sein. Da 1×1 Matrizen immer nur einen Linearfaktor als charakteristisches Polynom besitzen muss die Matrix mindestens 2×2 sein. Das Standardbeispiel ist

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit dem charakteristischen Polynom $t^2 + 1$, welches in $\mathbb{R}$ irreduzibel ist. (1 Punkt)

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^k) - \dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^{k-1})$$

gerade die Anzahl der Jordanblöcke die mindestens Größe $k \times k$ haben, denn es ist die Anzahl der verallgemeinerten Eigenvektoren der Stufe k in der Jordannormalform, jeder von Ihnen kommt in genau einem Block der Mindestgröße $k \times k$ vor. Damit entspricht für $k \geqslant 2$

$$\Big(\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^k) - \dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^{k-1})\Big) - \Big(\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^{k+1}) - \dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^k)\Big)$$

gerade der Anzahl der Jordanblöcke mit Größe $k \times k$. Für $k = 1$ ist das natürlich gerade durch $\dim(\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^k)$ gegeben. (2 Punkte)

(c) Die Matrix bezeichnen wir ab hier mit A. Die Dimension der verallgemeinerten Eigenräume $\mathrm{Kern}(\lambda I - A)^k$ ist direkt an der Anzahl der verallgemeinerten Eigenvektoren k-ter Stufe in der

Normalform ablesbar, so sind z.B. die $e_1, e_6, e_9, e_{12}, e_{13}$ diejenigen der Stufe 1, e_2, e_7, e_{10} diejenigen zu Stufe 2 und so weiter. Diese muss man sukzessive aufsummieren, denn die verallgemeinerten Eigenvektoren niedrigerer Stufe sind in den verallgemeinerten Eigenräumen höherer Stufe enthalten. Das charakteristische Polynom ist das Produkt der Linearfaktoren zu den entsprechenden Eigenwerten mit der Vielfachheit entsprechend der Anzahl dem Auftreten in der Matrix, also

$$\chi = (t - \lambda_1)^8 \, (t - \lambda_2)^5.$$

(1 Punkt)

Das Minimalpolynom besteht aus den gleichen Linearfaktoren aber jeweils zur Potenz der Größe des größten Jordanblocks, also müssen wir hier ab jetzt zwei Fälle unterscheiden, nämlich die, wo $\lambda_1 = \lambda_2$ bzw. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist.

Ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, dann ist das Minimalpolynom durch $(t - \lambda)^5$ gegeben, und die verallgemeinerten Eigenräume verschiedener Stufen haben die Dimensionen

$$\begin{aligned}
&\dim(\operatorname{Kern}(\lambda I_{13} - A)) = 5, && \dim(\operatorname{Kern}(\lambda I_{13} - A)^2) = 8,\\
&\dim(\operatorname{Kern}(\lambda I_{13} - A)^3) = 11, && \dim(\operatorname{Kern}(\lambda I_{13} - A)^4) = 12,\\
&\dim(\operatorname{Kern}(\lambda I_{13} - A)^k) = 13,\ k \geqslant 5
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann ist das Minimalpolynom durch $(t - \lambda_1)^5 (t - \lambda_2)^3$ gegeben, und die verallgemeinerten Eigenräume haben die Dimensionen

$$\begin{aligned}
&\dim(\operatorname{Kern}(\lambda_1 I_{13} - A)) = 2, && \dim(\operatorname{Kern}(\lambda_1 I_{13} - A)^2) = 4,\\
&\dim(\operatorname{Kern}(\lambda_1 I_{13} - A)^3) = 6, && \dim(\operatorname{Kern}(\lambda_1 I_{13} - A)^4) = 7,\\
&\dim(\operatorname{Kern}(\lambda_1 I_{13} - A)^k) = 8,\ k \geqslant 5
\end{aligned}$$

und

$$\dim(\operatorname{Kern}(\lambda_2 I_{13} - A)) = 3, \quad \dim(\operatorname{Kern}(\lambda_2 I_{13} - A)^2) = 4, \quad \dim(\operatorname{Kern}(\lambda_2 I_{13} - A)^k) = 5,\ k \geqslant 3.$$

(1 Punkt)

(d) Im Fall 1 liegt nur ein einziger Jordanblock vor, da nur ein eindimensionaler Eigenraum existiert. Aus diesem generiert man also genau eine Jordankette, die den ganzen Raum aufspannen muss, es muss also in jeder Stufe die Dimension um eins wachsen, damit dieser Fall eintreten kann, was auch genau der Fall ist. Wir können also vorhersagen, dass die einzige Jordanform, die aus diesem Fall entstehen kann aus einem einzigen Jordanblock besteht. (1 Punkt)

Im Fall 2 ist der Eigenraum zu λ n-dimensional und damit ist die Matrix diagonalisierbar mit n 1×1 Jordanblöcken. Es ergibt sich kein Widerspruch aus den Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume bis Stufe 4. (1 Punkt)

Im Fall 3 gibt es 4 Blöcke und wir lesen an den Differenzen der Raumdimensionen ab, dass gerade jeweils 2 verallgemeinerte Eigenvektoren der Stufen 2, 3 und einer der Stufe 4 existieren. Da die Raumdimension von 10 hier noch nicht erreicht ist muss in der Stufe 5 ein weiterer verallgemeinerter Eigenvektor der Stufe 5 dazukommen, damit eine Jordanform existieren kann. In diesem Fall legt das die Jordanform eindeutig fest auf

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & & \lambda & & & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda & 1 & & & \\
 & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right] \quad \text{(1 Punkt).}$$

Im Fall 4 gibt es einen Widerspruch, denn der Aufstieg der Dimension der verallgemeinerten Eigenräume der Stufe 2 auf 3 zeigt, dass es (bis auf Skalierung) nur einen einzelnen verallgemeinerten Eigenvektor der Stufe 3 gibt. Der Anstieg der Dimension der Räume von Stufe 3 auf 4 um 3 benötigt aber gerade auch 3 linear unabhängige verallgemeinerte Eigenvektoren der Stufe 3. (Die Anstiege der Raumdimensionen der verallgemeinerten Eigenräume muss monoton fallen). (1 Punkt)

(e) Das charakteristische Polynom ergibt sich (leicht durch Entwickeln nach der ersten und zweiten Zeile zu berechnen) zu $(t-1)^3(t-2)$, zerfällt also in Linearfaktoren, damit können wir die Jordannormalform berechnen. Der Eigenraum zum Eigenwerte 2 ist leicht zu erkennen, dieser ist $\langle e_4\rangle$. Für den Eigenraum zum Eignwert lösen wir das homogene Gleichungssystem zur Matrix $I-A$, also

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -4 & -2 & -1 & 0
\end{array}\right]$$

mit der Lösungsmenge $\langle e_1\rangle$. Damit liegt die JNF schon vor, denn sie hat zu jedem Eigenwert nur einen Block, ist also

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix fehlen nur noch je ein passender verallgemeinerter Eigenvektor der Stufen 2 und 3 für den Eigenwert 1. Wir lösen $(A - 2I)x = e_1$, also

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

und erhalten als verallgemeinerten Eigenvektor der Stufe 2 zum Beispiel $(0, -1, 1, 2)^\mathsf{T}$ sowie durch Lösen von

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

als verallgemeinerten Eigenvektor der Stufe 3 beispielsweise $(0, -1, 2, 2)^\mathsf{T}$. Diese Vektoren spaltenweise in eine Matrix geschrieben und diese invertiert erhalten wir also

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 Punkte)

Hausaufgabe II-10.2 (Ähnlichkeitscharakterisierung über Polynome) 1 + 3 + 1 = 5 Punkte

Es seien $n \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper sowie $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \le 1$ sind A und B genau dann ähnlich, wenn $\chi_A = \chi_B$.

(b) Für $n \le 3$ sind A und B genau dann ähnlich, wenn $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$.

(c) Für $n \geqslant 4$ kann $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ sein, ohne dass A und B ähnlich sind.

Lösung.

(a) Für $n = 0$ gibt es nur eine Matrix, nämlich die leere. Für $n = 1$ ist wegen der Kommutativität in K Ähnlichkeit gerade die Gleichheit und entspricht gerade der Gleichheit der charakteristischen Polynome. (1 Punkt)

(b) Im Fall $n = 2$ und $n = 3$ ist die Hinrichtung klar, da die dazugehörigen Polynome invariant unter Ähnlichkeitstransformationen sind. Für die Rückrichtung gibt es verschiedene Fälle für die charakteristischen Polynome zu untersuchen.

Es seien also A, B mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ gegeben.

Ist das charakteristische Polynom ein Produkt aus Linearfaktoren, dann können wir die Jordanschen Normalformen von A und B untersuchen, zu denen sie jeweils ähnlich sind. Auf den Diagonalen der Jordan-Normalform stehen die gleichen Werte. Im Minimalpolynom gibt die Potenz jedes Linearfaktors die Größe des größten Jordanblocks zum dazugehörigen Eigenwert an. Damit ist die Jordan-Normalform durch ihr charakteristisches und ihr Minimalpolynom in diesen Dimensionen eindeutig bestimmt, daher müssen A und B ähnlich sein.

Zerfällt χ_A nicht in Linearfaktoren, dann ist im Fall $n = 2$ das Polynom χ_A quadratisch und irreduzibel über K, damit gilt $\mu_A = \chi_A = \chi_B = \mu_B$ und die Frobenius-Normalformen von A und B stimmen überein (bestehen nämlich aus genau einem Block zum Minimalpolynom), womit A und B ähnlich sind.

Im Fall $n = 3$ ist χ_A entweder kubisch irreduzibel oder zerfällt in einen Linearfaktor und ein quadratisches irreduzibles Polynom, womit wieder $\mu_A = \chi_A = \chi_B = \mu_B$ ist, und mit der Frobenius-Normalform folgt wieder Ähnlichkeit. (3 Punkte)

(c) Die folgenden Beispiele waren falsch und wurden korrigiert. Die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

besitzen beide das gleiche charakteristische Polynom (t^4) und das gleiche Minimalpolynom (t^2), sind aber jeweils ihre eigenen Jordanformen und damit offensichtlich nicht ähnlich. Analoge Beispiele kann man in ausreichend großer Raumdimension natürlich ebenso bauen. Hier sieht man, dass die charakteristischen und Minimalpolynome die dazugehörige Matrix bis auf Ähnlichkeit nur in niedrigen Raumdimensionen festlegen. (1 Punkt)

Hausaufgabe II-10.3 (Transformation von Bilinearformen) 1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte

Gegeben sei der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathcal{P}(\llbracket 1,4\rrbracket), \triangle, \cdot)$ und die Bilinearform

$$\gamma\colon \mathcal{P}(\llbracket 1,4\rrbracket) \times \mathcal{P}(\llbracket 1,4\rrbracket) \to \mathbb{Z}_2, \qquad \gamma(A,B) := \#(A \cap B) \mod 2$$

und die Basis $B := (\{1,3\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{1\})$.

(a) Entscheiden Sie, ob γ selbstdual ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^B_{B^*}(\gamma) \in Z_2^{4\times 4}$.

(c) Führen Sie eine Kongruenztransformation auf die Punktmengenbasis P durch.

(d) Bestimmen Sie den Rang der Bilinearform und entscheiden Sie, ob sie entartet ist.

Lösung.

(a) Selbstdualität von Bilinearformen ist über deren entsprechende – über Isomorphie zugeordnete – lineare Abbildungen in $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ definiert und entspricht gerade der Symmetrie der Bilinearform. Dass die vorliegende Bilinearform symmetrisch ist ist offensichtlich, da es der Mengenschnitt ebenfalls ist. (1 Punkt)

(b) Zu bestimmen sind die Einträge $a_{ij} = \gamma(A_i, A_j)$ der Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^B_{B^*}(\gamma)$ für alle $i, j \in \llbracket 1,4\rrbracket$. Damit ergibt sich dann direkt die Darstellung

$$\mathcal{M}^B_{B^*}(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(c) Die Darstellung der Punktmengenelemente bezüglich B ergibt (spaltenweise) die Transformationsmatrix

$$\mathcal{T}^P_B = \mathcal{T}^{P\,-1}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit der dualen Transformation

$$\mathcal{T}^{B^*}_{P^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und damit

$$\mathcal{M}^{P}_{P^*}(\gamma) = \mathcal{T}^{B^*}_{P^*} \mathcal{M}^{B}_{B^*}(\gamma) \mathcal{T}^{P}_{B}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

genau wie man es für diese Basis erwarten würde. (2 Punkte)

(d) Den Rang liest man direkt an der zuletzt ausgerechneten Darstellungsmatrix ab, denn die Einheitsmatrix hat offensichtlich vollen Rang (4). (1 Punkt)

Die Abbildung ist außerdem nicht entartet, denn gilt

$$\gamma(A, B) = \#(A \cap B) \mod 2 = 0$$

für alle $B \in \mathcal{P}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$, dann gilt das insbesondere für alle Punktmengen aus P. Damit muss A leer oder $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ sein. Da das dann aber auch für $B = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ gilt, muss A leer sein und damit die 0 im Vektorraum. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.