R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 9

Ausgabedatum: 10. Juni 2024
Abgabedatum: 17. Juni 2024

Hausaufgabe II-9.1 (Die lokal annullierenden Polynome bilden ein Ideal) 4 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 29.1, also dass für $x \in K^n$ die Menge

$$J_{A,x} := \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \widetilde{p}(A)\, x = 0 \right\} \tag{29.1}$$

ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal ist.

Hausaufgabe II-9.2 (lokale Minimalpolynome eines Endomorphismus und seiner Darstellungsmatrizen) 4 Punkte

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. Zeigen Sie, dass für $v \in V$ und seinen Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$

$$\mu_{f,v} = \mu_{A,x}. \tag{29.3}$$

gilt.

Hausaufgabe II-9.3 (Frobenius Normalform) 5 + 4 = 9 Punkte

Gegeben seien die Matrizen

(a) $A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$

(b) $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

Führen Sie für beide Matrizen die folgenden Schritte durch:

(1) Bestimmen Sie die Diagonalform der Matrix, wenn diese existiert.

(2) Bestimmen Sie die Invariantenteiler der Matrix.

(3) Bestimmen Sie die Frobeniusnormalform der Matrix.

Hausaufgabe II-9.4 (Gleichheit von μ_A und χ_A entspricht Ähnlichkeit zu C_{χ_A}) 6 Punkte

Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) $\mu_A = \chi_A$

(b) Es gibt genau einen Invariantenteiler.

(c) Die Frobenius-Normalform hat genau einen Block.

(d) A ist ähnlich zu C_{μ_A}.

(e) A ist ähnlich zu C_{χ_A}.

(f) Es gibt einen Vektor $x \in K^n$ mit $\left\langle x,\ A\,x,\ A^2\,x, \dots, A^{n-1}\,x \right\rangle = K^n$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.