Übung II - 9 (Lösung)

Ausgabedatum: 10. Juni 2024
Abgabedatum: 17. Juni 2024

Hausaufgabe II-9.1 (Die lokal annullierenden Polynome bilden ein Ideal) 4 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 29.1, also dass für $x \in K^n$ die Menge

$$J_{A,x} := \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \widetilde{p}(A)\, x = 0 \right\} \tag{29.1}$$

ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal ist.

Lösung.

Offensichtlich liegt das Minimalpolynom μ_A in $J_{A,x}$, damit handelt es nicht um das Nullideal und ist insbesondere nicht leer. (1 Punkt)

Für $p, q \in J_{A,x}$ ist außerdem $(p(A) - q(A))x = p(A)x - q(A)x = 0 - 0 = 0$ und damit nach dem Untergruppenkriterium ist $J_{A,x}$ eine Untergruppe. (1 Punkt)

Für beliebige Polynome p und q aus $K[t]$ ist außerdem $p(A)q(A) = q(A)p(A) = (q \cdot p)(A)$, da in beiden Auswertungen nur skalierte Potenzen von A auftreten, die alle miteinander kommutieren. (0.5 Punkte) Für $p \in J_{A,x}$ und $q \in K[t]$ ist daher

$$(q \cdot p)(A)x = (q \cdot p)(A)x = (q(A)p(A))x = q(A)(p(A)x) = q(A)0 = 0.$$

Das zeigt zugleich die Ringeigenschaft, als auch die (beidseitige) Idealeigenschaft. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe II-9.2 (lokale Minimalpolynome eines Endomorphismus und seiner Darstellungsmatrizen) 4 Punkte

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$,

$n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. Zeigen Sie, dass für $v \in V$ und seinen Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$

$$\mu_{f,v} = \mu_{A,x}. \tag{29.3}$$

gilt (Satz 29.3).

Lösung.

Auf Grund der Sätze 19.7 und 19.8 gilt für alle Polynome $p \in K[t]$:

$$p(f)(v) = \Phi_{B_V}(p(A)x) \quad \text{und} \quad \Phi_{B_V}^{-1}(p(f)(v)) = p(A)x$$

mit den Bijektionen $\Phi_{B_V} : K^n \to V$ und $\Phi_{B_V}^{-1} : V \to K^n$. (1 Punkt)

Damit ist für Polynome $p \in J_{f,v}$ und $q \in J_{A,x}$:

$$\begin{aligned} q(f)(v) &= \Phi_{B_V}(q(A)x) = \Phi_{B_V}(0) = 0, \\ p(A)(x) &= \Phi_{B_V}^{-1}(p(f)v) \ = \Phi_{B_V}^{-1}(0) = 0. \end{aligned}$$

(1.5 Punkte)

Damit ist $J_{f,v} \subseteq J_{A,x}$ und $J_{f,v} \supseteq J_{A,x}$, also $J_{f,v} = J_{A,x}$. Die Erzeuger dieser Ideale sind nach Satz 27.7 bis auf Skalierung eindeutig bestimmt, und da die lokalen Minimalpolynome normiert sind stimmen diese überein. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe II-9.3 (Frobenius Normalform) 5 + 4 = 9 Punkte

Gegeben seien die Matrizen

(a) $A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ (b) $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

Führen Sie für beide Matrizen die folgenden Schritte durch:

(1) Bestimmen Sie die Diagonalform der Matrix, wenn diese existiert.

(2) Bestimmen Sie die Invariantenteiler der Matrix.

(3) Bestimmen Sie die Frobeniusnormalform der Matrix.

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} t-3 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & t-3 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & t-2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & t+1 \end{pmatrix} \\
&= (t-3) \det \begin{pmatrix} t-3 & 2 & -4 \\ 1 & t-2 & 2 \\ 1 & -1 & t+1 \end{pmatrix} \\
&= (t-3)\,[(t-3)(t-2)(t+1) + 4 + 4 + 4(t-2) + 2(t-3) - 2(t+1)] \\
&= (t-3)\,\left[t^3 - 4t^2 + 5t - 2\right] \\
&= (t-1)^2(t-2)(t-3)
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit durch Polynomdivision gefunden wird. (1.5 Punkte)

Ob die Matrix diagonalisierbar ist hängt also an der geometrischen Vielfachheit des Eigenwert 1. Dafür untersuchen wir das homogene Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

bei dem man entweder den zweidimensionalen Lösungsraum direkt an der linearen Abhängigkeit von allen Paaren von der ersten, dritten und vierten Spalte abliest, oder strukturierter durch Zeilenstufentransformationen zu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

gelangt und entsprechend den Rang 2 der Matrix erhält.

Damit ist die Matrix diagonalisierbar, da die geometrischen Vielfachheiten sich zu n addieren und die (bis auf Umordnung der Eigenwerte eindeutige) Diagonalform ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1.5 Punkte)

Da die Matrix diaonalisierbar ist (und damit eine Basis aus Eigenvektoren existiert) besteht das Minimalpolynom aus den einzelnen Linearfaktoren ohne Vielfachheiten zu den Eigenwerten, also

$$\mu_A(t) = (t-1)(t-2)(t-3) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6.$$

Damit haben wir den ersten Invariantenteiler schonmal vorliegen und den ersten Block der Frobeniusnormalform und da die Summe der Grade der Invariantenteiler $n = 4$ sein muss, ist der letzte Invariantenteiler ein Linearfaktor sein, der das Minimalpolynom teilt, also gerade $(t-1)$, $(t-2)$ oder $(t-3)$, der Block wird 1×1 Größe haben und den entsprechenden Eigenwert tragen, der dazugehörige Basisvektor ist also ein Eigenvektor. Da ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben ist hier klar, dass der Faktor $(t-1)$ sein muss und die Matrix die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

haben muss. (2 Punkte)

(b) Mit Blockentwicklung der Determinante sieht man sofort, dass

$$\chi_B(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)^2(t^2+1)$$

ist. (1 Punkt)

Die Matrix ist also nicht diagonalisierbar, denn sie hat nur eine doppelte Nullstelle. Wir sehen sogar, dass der linke obere Diagonalblock gerade die Struktur hat, die dazu führt, dass der Eigenraum zum Eigenwert 1 gerade von dem ersten kanonischen Basisvektor aufgespannt wird. Das Minimalpolynom hat die 1 ebenfalls als Nullstelle, kann aber nicht nur der Linearfaktor $t-1$ sein, denn an B ausgewertet ist diese Matrix ist offensichtlich nicht Null, sondern

$$B - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Außerdem ist (leicht auszurechnen auf Grund der Blockdiagonalstruktur)

$$(B - I_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit muss der in $\mathbb{R}$ irreduzible Anteil $t^2 + 1$ im Minimalpolynom vorkommen und damit hat das Minimalpolynom mindestens Grad 3. (1 Punkt)

Tatsächlich ist

$$(B - I_4)(B^2 + I) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit stimmen Minimal- und charakteristischen Polynom über, die Frobeniusnormalform ist also

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und die Matrix B ist also ähnlich zu der Begleitmatrix ihrer charakteristischen bzw. Minimalpolynome. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-9.4 (Gleichheit von μ_A und χ_A entspricht Ähnlichkeit zu C_{χ_A}) 6 Punkte

Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) $\mu_A = \chi_A$

(b) Es gibt genau einen Invariantenteiler.

(c) Die Frobenius-Normalform hat genau einen Block.

(d) A ist ähnlich zu C_{μ_A}.

(e) A ist ähnlich zu C_{χ_A}.

(f) Es gibt einen Vektor $x \in K^n$ mit $\langle x,\ A\,x,\ A^2\,x, \dots, A^{n-1}\,x \rangle = K^n$

Lösung.

Die Äquivalenz von Aussage (a) und Aussage (b) liegt auf der Hand, denn sind die beiden Polynome gleich, dann hat das Minimalpolynom vollen Grad und damit kann schon aus Dimensionsgründen kein weiter Elementarteiler existieren. Die Polynome stimmen genau dann nicht überein, wenn ihr Grad nicht gleich ist. Hat das Minimalpolynom nicht Grad n, dann muss aber auch ein weiterer Invariantenteiler existieren. (1 Punkt)

Die Äquivalenz von Aussage (b) und Aussage (c) ist eine direkte Folgerung der Bemerkung 29.10 wo der Begriff der Invariantenteiler festgelegt wird. (0.5 Punkte)

Die Äquivalenz von Aussage (c) und Aussage (d) ist eine direkte Folgerung aus Satz 29.9 zur Frobeniusnormalform. (0.5 Punkte)

Aussage (d) $\Rightarrow$ Aussage (e) gilt, weil Ähnlichkeit zur Begleitmatrix des Minimalpolyoms sofort den Grad des Minimalpolynoms auf n festlegt, womit es mit dem charakteristischen übereinstimmt. (1 Punkt)

Aussage (e) $\Rightarrow$ Aussage (a) gilt, weil ähnliche Matrizen die gleichen charakteristischen und minimalen Polynome haben, und wir von der Begleitmatrix wissen, dass diese beide übereinstimmen. (1 Punkt)

Für die Implikation Aussage (e) $\Rightarrow$ Aussage (f) kann man direkt den ersten Basisvektor v_1 der Basis $(v_1, \dots, v_n)$ wählen, bezüglich derer A durch die Begleitmatrix dargestellt wird. Die Basiswechselmatrix, die die v_i in den Spalten hat nennen wir T. Dann ist

$$\begin{aligned}
A^0 v_1 &= I v_1 \\
A^1 v_1 &= A v_1 = T C_{\chi_A} T^{-1} v_1 = T C_{\chi_A} e_1 = T e_2 = v_2 \dots \\
A^k v_1 &= T C_{\chi_A}^k T^{-1} v_1 = T C_{\chi_A}^k e_1 = T e_{k+1} = v_{k+1} \quad k \leq n-1.
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

Für die Implikation Aussage (e) $\Leftarrow$ Aussage (f) sieht man, dass die n-Vektoren, die den K^n aufspannen, natürlich linear unabhängig sein müssen, also eine Basis bilden. Die Darstellung von A bezüglich dieser Basis $(x, Ax, A^2x, \dots A^{n-1}x)$ ist gerade eine Begleitmatrix. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.