R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 8

Ausgabedatum: 3. Juni 2024
Abgabedatum: 10. Juni 2024

Hausaufgabe II-8.1 (Cayley-Hamilton für Endomorphismen) 3 Punkte

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie Aussage (ii) aus Satz 26.1, also dass $\widetilde{\chi_f}(f) = 0 \in \operatorname{End}(V)$ gilt.

Hausaufgabe II-8.2 (Ideale in Ringen) 5 + 1 + 2 + 2.5 + 1.5 = 12 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Teilmengen des dazugehörigen Rings Ideale mit den entsprechenden Verknüpfungen bilden.

(i) $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(ii) Die geraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(iii) Die ungeraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(iv) $\mathbb{R}^{n \times n}_{\triangledown}$ in $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ für $n \in \mathbb{N}$

(v) $E := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{die i-te Spalte von } A \text{ ist eine Nullspalte}\}$ in $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ für $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leqslant n$

(vi) $\{f \circ g \mid f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{Q}), f \text{ invertierbar}\}$ in dem Vektorraumendomorphismenring $(\operatorname{End}(\mathbb{Q}), +, \circ)$

(vii) $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ für eine nichtleere Menge X und $B \in \mathcal{P}(X)$

(b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 27.4, also dass wenn $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit nichtleerer Indexmenge I ist, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in R.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $E \subseteq R$. Zeigen Sie Satz 27.6, also

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \dots, n \; (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}, \tag{27.3a}$$

und beschreiben Sie kurz, warum und wie sich die Darstellung in kommutativen Ringen und Ringen mit Eins vereinfachen lässt.

(d) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein unitärer, kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

(ii) $(R, +, \cdot)$ hat genau zwei Ideale, nämlich die trivialen, die nicht übereinstimmen.

(e) Bestimen Sie ohne Beweis aber mit knapper Erklärung die unten stehenden erzeugten Ideale in den dazugehörigen Ringen

(i) $(\sqrt{2})$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(ii) (A) für $A \in \mathcal{P}(X)$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$

(iii) (E) für die Menge E aus Aufgabenteil (a) (v).

Hausaufgabe II-8.3 (Cayley-Hamilton und Minimalpolynom) 0.5 + 1.5 + 1.5 + 1 + 1.5 + 1 = 7 Punkte

In dieser Aufgabe sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von f genau dann $\lambda \in K[\lambda]$ ist, wenn f die Nullabbildung ist.

(b) Es sei $p = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom der **Begleitmatrix**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots \ddots & \ddots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit p übereinstimmt.

(c) Zeigen Sie, dass f genau dann nilpotent ist, wenn $\mu^{\text{alg}}(f, 0) = n$, und dass dann die Ordnung l der Nilpotenz kleiner oder gleich n sein muss. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass χ_f das Polynom λ^{nl} teilt.

(d) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom der dualen Abbildung $f^* \in \text{End}(V^*)$ mit dem von f übereinstimmt.

(e) Es sei f zusätzlich invertierbar. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von f^{-1} in Abhängigkeit des Minimalpolynoms von f.

(f) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von mindestens zwei der Endomorphismen aus Hausaufgabe II-7.2.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.