

ÜBUNG II - 8 (LÖSUNG)

Ausgabedatum: 3. Juni 2024
Abgabedatum: 10. Juni 2024

Hausaufgabe II-8.1 (Cayley-Hamilton für Endomorphismen) 3 Punkte

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $f \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie Aussage (ii) aus Satz 26.1, also dass $\widetilde{\chi}_f(f) = 0 \in \text{End}(V)$ gilt.

Lösung.

Für den Beweis gibt es (wie so oft) verschiedene Möglichkeiten. Eine Alternative ist das direkte Nachrechnen der Eigenschaft und Verwendung der Isomorphie von Endomorphismen und ihren Darstellungsmatrizen. Dafür sei $f \in \text{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ eine Darstellungsmatrix von f . Nach Definition 24.23 gilt $\chi_f = \chi_A = \sum_{j=0}^n c_j A^j$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{\chi}_A(A) && \text{nach Aussage (i) von Satz 26.1} \\ &= \sum_{j=0}^n c_j A^j && \text{wegen der Gestalt von } \chi_A \\ &= \sum_{j=0}^n c_j (\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f))^j && \text{wegen } A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n} \\ &= \sum_{j=0}^n c_j \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f^j) && \text{wegen Satz 19.8 oder Beispiel 25.6, beachte: } f^j = f \circ \dots \circ f \\ &= \mathcal{M}_{B_V}^{B_V} \left(\sum_{j=0}^n c_j f^j \right) && \text{wegen Satz 19.8 oder Beispiel 25.6} \\ &= \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\widetilde{\chi}_f(f)) && \text{wegen der Gestalt von } \chi_f. \end{aligned}$$

Weil die Zuordnung eines Endomorphismus zu seiner Darstellungsmatrix bzgl. der Basis B_V bijektiv ist (Satz 19.5), gilt $\widetilde{\chi}_f(f) = 0$.

Die oben aufgeführten Schritte entsprechen aber weitestgehend denen des Beweises von Satz 25.12, also zur Kommutativität von Algebraisomorphismen und den Polynomeinsetzungshomomorphismen. Es gilt also auch

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\chi_{\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)}} \left(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \right) && \text{nach Aussage (i) von Satz 26.1} \\ &= \widetilde{\chi}_f \left(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \right) && \text{wegen Definition 24.23} \\ &= \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\widetilde{\chi}_f(f)) && \text{wegen Satz 25.12,} \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass die Zuordnung eines Endomorphismus auf eine basisabhängige Matrixdarstellung auch ein Algebraisomorphismus zwischen Algebren mit 1 ist. Satz 19.13 Aussage (i) liefert uns aber, dass die Zuordnung ein Ringisomorphismus zwischen Ringen mit Eins ist und Satz 19.5 sichert die Vektorraumisomorphieeigenschaft. (3 Punkte)

Hausaufgabe II-8.2 (Ideale in Ringen)

5 + 1 + 2 + 2.5 + 1.5 = 12 Punkte

- (a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Teilmengen des dazugehörigen Rings Ideale mit den entsprechenden Verknüpfungen bilden.
- (i) \mathbb{N} in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
 - (ii) Die geraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
 - (iii) Die ungeraden ganzen Zahlen in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
 - (iv) $\mathbb{R}^{n \times n}$ in $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ für $n \in \mathbb{N}$
 - (v) $E := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{die } i\text{-te Spalte von } A \text{ ist eine Nullspalte}\}$ in $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ für $i, n \in \mathbb{N}, i \leq n$
 - (vi) $\{f \circ g \mid f, g \in \text{End}(\mathbb{Q}), f \text{ invertierbar}\}$ in dem Vektorraumendomorphismenring $(\text{End}(\mathbb{Q}), +, \circ)$
 - (vii) $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$ in $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ für eine nichtleere Menge X und $B \in \mathcal{P}(X)$
- (b) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie Lemma 27.4, also dass wenn $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit nichtleerer Indexmenge I ist, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in R .
- (c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $E \subseteq R$. Zeigen Sie Satz 27.6, also

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}, \quad (27.3a)$$

und beschreiben Sie kurz, warum und wie sich die Darstellung in kommutativen Ringen und Ringen mit Eins vereinfachen lässt.

(d) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein unitärer, kommutativer Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

(ii) $(R, +, \cdot)$ hat genau zwei Ideale, nämlich die trivialen, die nicht übereinstimmen.

(e) Bestimmen Sie ohne Beweis aber mit knapper Erklärung die unten stehenden erzeugten Ideale in den dazugehörigen Ringen

(i) $(\sqrt{2})$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(ii) (A) für $A \in \mathcal{P}(X)$ in $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$

(iii) (E) für die Menge E aus Aufgabenteil (a) (v).

Lösung.

(a) (i) \mathbb{N} ist in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **kein Ideal**, die natürlichen Zahlen bilden nicht einmal einen Unterring, denn sie sind multiplikativ nicht abgeschlossen in \mathbb{Z} , so ist $\mathbb{N} \cdot (-1) \not\subseteq \mathbb{N}$. (0,5 Punkte)

(ii) Die geraden ganzen Zahlen lassen sich gerade als $2\mathbb{Z}$ schreiben. Sie bilden einen Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, denn $2\mathbb{Z}$ bildet eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Das können wir mit dem Untergruppenkriterium nachprüfen. Nichtleerheit der Menge ist klar und $2z_1 - 2z_2 = 2(z_1 - z_2) \in 2\mathbb{Z}$. Die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation erledigen wir gleichzeitig mit der zusätzlichen Idealeigenschaft, es ist nämlich wegen der Assoziativität und Kommutativität

$$(2 \cdot z_2) \cdot z_1 = z_1 \cdot (2 \cdot z_2) = 2 \cdot (z_1 \cdot z_2) \in 2\mathbb{Z}$$

und da der Ring kommutativ ist stimmt die linksseitige Bedingung mit der rechtsseitigen überein. Hier handelt es sich also um **ein Ideal**. (0,5 Punkte)

(iii) Die ungeraden ganzen Zahlen sind genau die Menge $2\mathbb{Z} + 1$ und damit nicht einmal ein Unterring, denn die 0 liegt nicht in dieser Menge, damit kann es sich nicht um eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ handeln, und damit liegt **kein Ideal** vor. (0,5 Punkte)

(iv) Die oberen Dreiecksmatrizen bilden nach Lemma 15.35 einen Unterring der Matrizen. Sie bilden allerdings **kein Ideal**, denn wir müssten ja mit allen anderen Matrizen multiplizieren dürfen und müssten weiterhin eine obere Dreiecksmatrix erhalten, was, wie das folgende

Beispiel zeigt, nicht stimmt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man kann also sogar vollbesetzte Matrizen erhalten. (1 Punkt)

- (v) Hier handelt es sich zuerst einmal um einen Unterring der Matrizen, denn die Menge ist nicht leer (die Nullmatrix liegt darin), die additiv inversen Elemente (Minus die Matrix) erfüllen die gleiche Bedingung und die Abgeschlossenheit unter der Addition ist offensichtlich. Die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation folgt sofort aus der spaltenweise Interpretation der Matrixmultiplikation, ist nämlich A eine Matrix und B eine Matrix mit Nullspalte $b_{\bullet,i}$, dann ist

$$(ab)_{\bullet,i} = \sum_{k=1}^n a_{\bullet,k} \underbrace{b_{ki}}_0 = 0.$$

Das zeigt auch direkt die linksseitige Idealeigenschaft.

Allerdings ist die rechtsseitige Idealeigenschaft i. A. nicht erfüllt, wie man z. B. für $n = i = 2$ an

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sieht, daher handelt es sich für $n \geq 2$ um **kein Ideal**. Für $n = 1$ allerdings handelt es sich um das Nullideal. (1 Punkt)

- (vi) Da die Identität ein Endomorphismus ist können wir jedes $g \in \text{End}(\mathbb{Q})$ als $g = \text{id} \circ g$ schreiben, damit handelt es sich bei der Menge um den Endomorphismenring $(\text{End}(\mathbb{Q}), +, \circ)$ selbst, welcher offensichtlich **ein Ideal** bildet. (0,5 Punkte)
- (vii) Hier handelt es sich um einen Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$, denn \emptyset liegt in der Menge und jedes Element ist additiv selbstinvers, also ist

$$A_1 \Delta A_2' = A_1 \Delta A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq B$$

und nach dem Untergruppenkriterium liegt also eine Untergruppe von $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ vor. Außerdem ist die Menge multiplikativ abgeschlossen, nicht nur in sich, sondern auch bezüglich der Multiplikation mit beliebigen anderen Elementen $C \in \mathcal{P}(X)$, denn

$$A \cap C \subseteq A \subseteq B$$

was wieder zugleich die Idealeigenschaft zeigt, denn der Ring ist kommutativ, hier liegt also **ein Ideal** vor. (1 Punkt)

- (b) Aus ?? wissen wir, dass der beliebige nichtleere Schnitt von Unterringen wieder ein Unterring ist. Ist nun $a \in R$, dann ist wegen der Idealeigenschaft aller $J_i, i \in I$:

$$a \cdot \left(\bigcap_{i \in I} J_i \right) = \underbrace{\{ a \cdot j \mid j \in J_i \forall i \in I \}}_{\in J_i \forall i \in I} \subseteq \{ j \mid j \in J_i \forall i \in I \} = \bigcap_{i \in I} J_i$$

und die rechtsseitige Eigenschaft folgt analog. (1 Punkt)

- (c) Wir wählen die Bezeichnung

$$J := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}$$

für diese Teilaufgabe.

Wir zeigen nun im ersten Schritt, dass $(E) \supseteq J$. Da (E) ein Ideal ist, ist es eine additive Untergruppe, daher enthält es neben E auch E' . Auf Grund der Zusatzeigenschaft der Idealdefinition beinhaltet (E) auch die Mengen RE und ER . All diese Mengen können wir also auch nochmal von der jeweils anderen Seite mit R verknüpfen um $RER \subseteq (E)$ zu erhalten. Endliche Summen dieser Elemente liegen wegen der Untergruppeneigenschaft von (E) wieder in (E) , also ist $(E) \supseteq J$. (0.5 Punkte)

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $(E) \subseteq J$ indem wir zeigen, dass J ein Ideal ist, dass E enthält. Die Obermengeneigenschaft $J \supseteq E$ ist dabei klar, denn für $n = 1$ können wir a_1 ja aus E wählen. Dass J eine additive Untergruppe von $(R, +)$ ist, folgt mit dem Untergruppenkriterium. Für $n = 0$ ist die Summe in der Darstellung von E leer also $0 \in R$, damit ist J nicht leer. Für zwei Elemente $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{j=1}^m b_j$ aus J ist außerdem

$$\sum_{i=1}^n a_i - \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i$$

für $c_i = a_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $c_i = b_{i-n}$ für $i > n$. Es gilt also für die Familie $(c_i)_{i=1, \dots, n+m}$ nur den hinteren Teil zu untersuchen, also die Frage zu klären, ob $-b_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER$, wenn dies für die b_i gilt. Ist b_i in E oder $-E$, dann ist das offensichtlich. Anderenfalls folgt die Eigenschaft aus den Distributivgesetzen, denn es ist z. B. für $b_i = r e \tilde{r} \in RER$

$$-b_i = -(r e \tilde{r}) = (-r) e \tilde{r} = r e (-\tilde{r}) \in RER.$$

Wie immer müssen wir die multiplikative Abgeschlossenheit von J bezüglich sich selbst nicht prüfen, denn wir müssen sie ja sogar für Multiplikation mit jedem Ringelement prüfen. Sei also $a \in R$ und $\sum_{i=1}^n a_i \in J$. Dann ist

$$a \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a \cdot a_i$$

und $a \cdot a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER$ folgt aus der multiplikativen Assoziativität, denn es ist z. B. für $a_i = r e \tilde{r} \in RER$:

$$a \cdot a_i = a (r e \tilde{r}) = (ar) (e \tilde{r}) \in RER.$$

(1 Punkt)

In kommutativen Ringen ist $ER = RE \supseteq RER$ und in Ringen mit Eins ist $E, -E \subseteq RE \subseteq RER$ und $ER \subseteq RER$, wodurch sich in der endlichen Summe die Summanden auf eine entsprechende kürzere Darstellung der Mengenvereinigung einschränken lassen. Die kürzeste Darstellung ergibt sich bei kommutativen Ringen mit 1, hier reicht es, die Summanden aus ER oder RE zu wählen. (0.5 Punkte)

- (d) Wir starten mit der Hinrichtung, dafür sei also $(R, +, \cdot)$ ein Körper und J ein Ideal in R , das nicht das Nullideal ist. Dann existiert $a \in J \setminus \{0\}$. Wegen der Idealeigenschaft ist $R \cdot a \subseteq R \cdot J \subseteq J$ und da $a^{-1} \in R$ ist, ist auch $1 \in J$. Damit muss aber $R = R \cdot 1 \subseteq R \cdot J \subseteq J \subseteq R$ sein und damit $J = R$. (1 Punkt)

Sei nun R ein Ring mit genau zwei Idealen, dann ist er insbesondere nicht der Nullring, da dieser nur ein Ideal (sich selbst) besitzt. Da der Ring unitär und nicht der Nullring ist, muss er zumindest die ungleichen Elemente $0 \neq 1$ enthalten. Wären nur diese beiden Elemente enthalten würde es sich bis auf Isomorphie um \mathbb{Z}_2 handeln, und damit um einen Körper. Anderenfalls gibt es ein weiteres Element $a \in R \setminus \{0, 1\}$ und es ist für jedes solcher Elemente

$$\langle a \rangle = R,$$

da das erzeugte Ideal immer die Menge selbst enthält und damit nicht nur das Nullideal sein kann. (0.5 Punkte)

Aus der Kommutativität und Existenz der Eins des Rings folgt nun, dass

$$R = \langle a \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in \underbrace{\{\pm a\}}_{\in Ra} \cup Ra \cup \underbrace{aR}_{=Ra} \cup \underbrace{RaR}_{=Ra}) \right\}$$

also, dass für geeignete Ringelemente r_i gilt, dass $1_R = \sum_{i=1}^n (r_i a) = (\sum_{i=1}^n r_i) a$, und damit existieren die multiplikativ inversen Elemente für jedes nicht Null Element. Damit handelt es sich nach Satz 10.4 um einen Körper. (1 Punkt)

- (e) (i) Wie wir gerade gesehen haben sind die Hauptideale zu nicht-Null-Elementen in Körpern gerade der Körper selbst, daher ist $(\sqrt{2}) = \mathbb{R}$. (0.5 Punkte)
- (ii) Es ist $\langle A \rangle = \mathcal{P}(A)$. Sowohl Unterring- als auch Idealzusatzesigenschaft folgen aus der verkleinernden Eigenschaft des Schnitts, also dass $A \cap C = C \cap A \subseteq A$ für beliebige

$C \in \mathcal{P}(X)$. Alternativ sieht man das anhand der eben bewiesenen Darstellung, denn der Ring ist unitär und kommutativ und jedes Element ist additiv selbstinvers, also ist

$$(A) = \left\{ a \mid a \in \mathcal{P}(X) \cap A \right\} = \left\{ a \mid a \in \mathcal{P}(A) \right\}.$$

(0,5 Punkte)

(iii) Hier müssen wir Fälle unterscheiden. Wenn $n = 1$ ist, dann muss $i = 1$ sein und damit ist E die Menge, die nur die Nullmatrix enthält. Diese erzeugt das triviale Nullideal.

Ist $n \geq 2$, dann liegen die kanonischen Basismatrizen $k \cdot E_{rs}$ mit nur einem einzigen Eintrag $k \in K$ an Zeile r und Spalte s für $s \neq i$ in E und für beliebige r und s in $K^{n \times n}$. Das beliebige Produkt $k \cdot E_{rs} E_{tu} = k \cdot E_{ru}$ für Indizes $r, s, t, u \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und $s \neq i$ muss also Teil des Ideals sein, diese Matrizen können wir auf Grund der obigen Darstellung des erzeugten Ideals auch endlich (also insbesondere n^2 oft) summieren und bleiben immernoch im Ideal, damit liegt jede Matrix in dem erzeugten Ideal, dieses ist also $(J) = K^{n \times n}$. (0,5 Punkte)

Hausaufgabe II-8.3 (Cayley-Hamilton und Minimalpolynom) 0,5 + 1,5 + 1,5 + 1 + 1,5 + 1 = 7 Punkte

In dieser Aufgabe sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$.

- (a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von f genau dann $\lambda \in K[\lambda]$ ist, wenn f die Nullabbildung ist.
- (b) Es sei $p = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom der **Begleitmatrix**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit p übereinstimmt.

- (c) Zeigen Sie, dass f genau dann nilpotent ist, wenn $\mu^{\text{alg}}(f, 0) = n$, und dass dann die Ordnung l der Nilpotenz kleiner oder gleich n sein muss. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass χ_f das Polynom λ^{nl} teilt.
- (d) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom der dualen Abbildung $f^* \in \text{End}(V^*)$ mit dem von f übereinstimmt.

- (e) Es sei f zusätzlich invertierbar. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von f^{-1} in Abhängigkeit des Minimalpolynoms von f .
- (f) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von mindestens zwei der Endomorphismen aus Hausaufgabe II-7.2.

Lösung.

- (a) Ist f die Nullabbildung, dann ist λ^1 an f ausgewertet gerade $f = 0$. Ein Polynom kleineren Grades kann dies nicht erfüllen, denn das wäre ein konstantes nicht-Null-Polynom, damit ist das Minimalpolynom λ .

Ist das Minimalpolynom von f durch λ gegeben, dann ist die Auswertung von λ an f gerade f und nach Definition des Minimalpolynoms auch 0. (0.5 Punkte)

- (b) Es genügt zu zeigen, dass Einsetzen der Begleitmatrix (ab jetzt genannt A) in beliebige Polynome vom Grad $n - 1$ nicht die Nullmatrix erzeugt. Dabei hilft das Verständnis, wie die Potenzen der Begleitmatrix aussehen, hier gilt nämlich

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 & a_0 a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & -a_0 + a_1 a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 & -a_1 + a_2 a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_3 & -a_2 + a_3 a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & -a_{n-3} + a_{n-2} a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 & * & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_3 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_4 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} & * & * \end{bmatrix},$$

wobei die $*$ für weitere Terme in Abhängigkeit der Einträge a_i stehen. Strukturell wichtig ist aber eigentlich nur, dass die mit Einsen besetzte Nebendiagonale mit jeder weiteren Potenzhöhung auf die nächste Nebendiagonale (nach links unten) wandert, während sich hinten weitere Spalten bilden, deren Einträge potentiell Nullen ergeben könnten, wenn sie (skaliert) aufaddiert werden. Die erste Spalte von A^{n-1} ist allerdings immer der n -te kanonische Basisvektor. Entsprechend gilt für die Einsetzung von A in ein Polynom der Form $q = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda^i$, dass

$$q(A) = \begin{bmatrix} b_0 & * & \dots & * \\ b_1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ b_{n-1} & * & \dots & * \end{bmatrix} = 0$$

genau dann gilt, wenn alle Koeffizienten $b_i = 0$ sind, und damit q das Nullpolynom. Da nach Cayley-Hamilton das charakteristische Polynom (vom Grad n) allerdings A auf 0 abbildet, muss das Minimalpolynom ebenfalls vom Grad n sein. Die Eindeutigkeit des Minimalpolynoms liefert die Gleichheit. Alternativ folgt aus $A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda^i = 0$ mit einem komponentenweisen Vergleich der Einträge der ersten Spalte der beiden Matrizen (in A^n stehen hier die $-a_i$), dass $a_i = b_i$. (1,5 Punkte)

- (c) Die Aussage $\mu^{\text{alg}}(f, 0) = n$ ist äquivalent zu $\chi_f = \lambda^n$. Ist also $\mu^{\text{alg}}(f, 0) = n$, dann sagt der Satz von Cayley-Hamilton uns, dass $f^n = 0$, womit f nilpotent ist. Hier sieht man direkt, dass die Ordnung der Nilpotenz kleiner oder gleich n sein muss. Die Ordnung der Nilpotenz ist gerade der Grad des Minimalpolynoms. (0,5 Punkte)

Ist f hingegen nilpotent mit Ordnung l , dann wissen wir bereits, dass f nur den Eigenwert Null hat (??), das charakteristische Polynom hat also die Form $\chi_f = \lambda^k q$ für ein $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und ein monisches $q \in K_{n-k}[\lambda]$, es ist aber noch nicht klar, dass $k = n$ und $q = 1$ sein muss. Allerdings ist auf Grund der Nilpotenzeigenschaft

$$\lambda^{ln} = \det(\lambda^l \text{id}) = \det\left((\lambda \text{id} - f) \circ (\lambda^{l-1} \text{id} + \lambda^{l-2} f + \dots f^{l-1})\right) = \chi_f \det\left(\lambda^{l-1} \text{id} + \lambda^{l-2} f + \dots f^{l-1}\right)$$

Also teilt χ_f das Polynom λ^{ln} und ist selbst vom Grad n mit führendem 1 Koeffizienten, muss also λ^n sein. (1 Punkt)

- (d) Ist p das Minimalpolynom von f , dann ist $p(f) = 0$ und entsprechend für eine Basis B_V von V auch p das Minimalpolynom von $\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. Nun ist weiterhin

$$0 = 0^T = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(p(f))^T = p\left(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)\right)^T = p\left(\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V^*}(f^*)\right) = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V^*}(p(f^*))$$

und damit $p(f^*) = 0$. Damit teilt das Minimalpolynom von f^* auch p . Mit vertauschten Rollen (und der kanonischen Injektion) folgt, dass sich beide Polynome gegenseitig teilen und führende Einsen haben und damit $p = q$ ist. (1 Punkt)

- (e) In der Aufgabenstellung war leider ein Copy-Paste Fehler. Gesucht werden sollte eine Darstellung des Minimalpolynoms von f^{-1} in Abhängigkeit des Minimalpolynoms von f . Die Lösung dazu sieht wie folgt aus:^{GM} Es sei $p = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a^{k-1} \lambda^{k-1} + \lambda^k$ das Minimalpolynom zu f . Dann ist $a_0 \neq 0$, denn p teilt χ_f , wo der Koeffizient zum Index 0 der Determinante entspricht und somit ungleich 0 ist.

Aus

$$0 = (f^{-1})^k \circ 0 = (f^{-1})^k \circ p(f) = a_0 (f^{-1})^k + a_1 (f^{-1})^{k-1} + \dots + a_{k-1} f^{-1} + 1$$

folgt mit $a_0 \neq 0$ sofort, dass für $q = \frac{1}{a_0} + \frac{a_{k-1}}{a_0} \lambda + \dots + \frac{a_1}{a_0} \lambda^{k-1} + \lambda^k$ die Bedingung $q(f^{-1}) = 0$ erfüllt ist. Damit teilt das Minimalpolynom von f^{-1} das Polynom q . Damit ist der Grad des Minimalpolynom von f^{-1} kleiner als oder gleich k . Mit vertauschten Rollen von f und f^{-1} folgert man nun aber direkt die umgekehrte Abschätzung und erhält, dass der Grad gleich ist, q und das Minimalpolynom von f^{-1} haben also den gleichen Grad, teilen sich und haben führende Einskoeffizienten, sie stimmen also überein. Wir haben also wieder bis auf Skalierung das reziproke Polynom zum Minimalpolynom von f . (1.5 Punkte)

Die Aufgabe ist trotzdem lösbar, und zwar mit folgenden Argumenten:^{GM} Ist $\chi_f = \mu_f \cdot q$ für $q \in K[t]$ vom Grad $n - m$ und bezeichnen wir die konstanten Terme in den Polynomen mit $\chi_{f_0}, \mu_{f_0}, q_0$ und die dazugehörigen reziproken Polynome mit $\widetilde{\chi}_f, \widetilde{\mu}_f, \widetilde{q}$, dann ist wegen der Kommutativität von der Bildung reziproker Polynome und dem Produkt von Polynomen (davon kann man sich mit einem Koeffizientenvergleich leicht überzeugen):

$$\chi_{f^{-1}} = \frac{1}{\chi_{f_0}} \widetilde{\chi}_f = \frac{1}{\mu_{f_0} q_0} \widetilde{\mu}_f \cdot \widetilde{q} = \frac{1}{\mu_{f_0} q_0} \widetilde{\mu}_f \cdot \widetilde{q}.$$

- (f) Je Aussage ein halber Punkt, also (1 Punkt)

Wir kennen aktuell zwei Möglichkeiten, ein Minimalpolynom zu bestimmen. Variante 1 fundiert auf Lemma 28.9, also der Aussage, dass das Minimalpolynom die gleichen Nullstellen hat, wie das charakteristische Polynom. Da wir die charakteristischen Polynome der fraglichen Endomorphismen schon in Hausaufgabe II-7.2 berechnen mussten, können wir mit dem Produkt aller Linearfaktoren des charakteristischen Polynoms (alle mit Potenz 1) als Ansatz starten, A/f einsetzen und schauen ob Null rauskommt. Dann kann man schrittweise die Potenzen in den Linearfaktoren erhöhen, bis Null rauskommt, siehe Beispiel 28.8. Wenn man die Vorarbeit zu Bestimmung des charakteristischen Polynoms schon geleistet hat kann das schneller zum Erfolg führen, als der strukturierte Ansatz, den Kern der Matrixpotenzen bis höchstens zur Raumdimension zu bestimmen, siehe Beispiel 28.5.

- (i) Das charakteristische Polynom ist hier $(\lambda - 9)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$, zerfällt also in Linearfaktoren.

Da das Minimalpolynom die gleichen Nullstellen hat stimmen die beiden Polynome in diesem Fall überein.

- (ii) In Frage kommen auf Grund der Nullstellen die Polynome $(\lambda - 1)^k(\lambda - 2)^l$ für $k, l \in \{1, 2\}$. Wir bestimmen (Achtung, der Matrizenring ist nicht kommutativ aber die Identitätsmatrix und A kommutieren mit A , wir dürfen also in eine Faktorisierung des Polynoms genauso einsetzen)

$$A - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - I_4)(A - 2I_4) = \begin{bmatrix} 0 & -a & da & ae + bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - I_4)^2(A - 2I_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & adf + bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - I_4)(A - 2I_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & -da & -ae + daf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier sieht man also, dass das Minimalpolynom genau dann durch $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ gegeben ist, wenn $a = f = 0$ ist. Ist $a = 0 \neq f$ oder $a \neq 0 = f$, dann sind die Minimalpolynome jeweils durch Hinzufügen des dazugehörigen Faktors zu finden. Ist $a, f \neq 0$, dann stimmt das Minimal- mit dem charakteristischen Polynom überein.

Bei dieser Aufgabe lohnt sich die Berechnung der Matrixpotenzen um ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung des Kerns zu verwenden nicht, die Terme werden wegen der Variable a bis f schlichtweg zu unübersichtlich. Dabei ist z. B.

$$A^0 = I$$

$$\begin{aligned}
 A^1 &= \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2a & 3b + ad & 3c + ae + bf \\ 0 & 1 & 3d & 3e + df \\ 0 & 0 & 4 & 4f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
 A^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 3a & 7b + 4ad & 7c + 4ae + 3df + 5bf \\ 0 & 1 & 7d & 7e + 5df \\ 0 & 0 & 8 & 12f \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\
 A^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 4a & 15b + 11ad & 15c + 17bf + 6adf + 11ae \\ 0 & 1 & 15d & 15e + 17df \\ 0 & 0 & 16 & 32f \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- (iii) Da es sich um eine Begleitmatrix handelt, stimmen das Minimal- und das charakteristische Polynom überein, sind also $p = 2 + 3t^2 + t^4$.
- (iv) Das charakteristische Polynom des Endomorphismus ist $(\lambda - 1)^2 \lambda^3$. Die Nullstellen des minimalen Polynom stimmen mit denen des charakteristischen überein und wir bestimmen (mit der Abkürzung $A := \mathcal{M}_{PM}^{PM}(f)$):

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 (A - I_5) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 A(A - I_5) &= 0
 \end{aligned}$$

das minimale Polynom ist also $(\lambda - 1)\lambda$.

Da A ein Projektor ungleich der Identität ist, ist auch sofort klar, dass das Minimalpolynom quadratisch sein muss, denn $A^2 = A$.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.