

## ÜBUNG II - 7

Ausgabedatum: 27. Mai 2024  
 Abgabedatum: 3. Juni 2024

**Hausaufgabe II-7.1** (Zum charakteristischen Polynom) 1.5 + 1.5 + 1 + 1.5 + 0.5 = 6 Punkte

In dieser Aufgabe sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f \in \text{End}(V)$ .

- (a) Es sei  $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + t^n \in K[t]$ . Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der **Begleitmatrix**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit  $p$  übereinstimmt.

- (b) Es sei  $W$  ein  $f$ -invarianter Unterraum von  $V$ . Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von  $f|_W$  das charakteristische Polynom von  $f$  teilt.
- (c) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der dualen Abbildung  $f^* \in \text{End}(V^*)$  mit dem von  $f$  übereinstimmt.
- (d) Es sei  $f$  zusätzlich invertierbar. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von  $f^{-1}$  in Abhängigkeit des charakteristischen Polynoms von  $f$ .
- (e) Zeigen Sie, dass wenn das charakteristische Polynom von  $f$  durch  $\chi_f = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  mit  $\lambda_i \in K$  gegeben ist, dann ist

$$\text{trace}(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \det(f) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Hausaufgabe II-7.2** (Eigenwertuntersuchungen)

2.5 + 2.5 + 0.5 + 1.5 = 7 Punkte

Bestimmen Sie für alle unten stehenden Endomorphismen/Matrizen die Eigenwerte sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit. Bestimmen Sie weiterhin zu allen Eigenwerten die Eigenräume und dazugehörige Basen. Geben Sie jeweils so früh wie möglich in Ihrer Untersuchung an, ob der Endomorphismus/die Matrix diagonalisierbar ist.

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 9 & 10 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_{11}^{4 \times 4} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$$

(d)  $(\mathcal{P}(\llbracket 1, 5 \rrbracket), \Delta, \cdot) \ni A \mapsto A \cap 2\mathbb{N} \in (\mathcal{P}(\llbracket 1, 5 \rrbracket), \Delta, \cdot)$  jeweils über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$

**Hausaufgabe II-7.3** (Teilmengenalgebra über  $\mathbb{Z}_2$ )

2 + 2 = 4 Punkte

Es sei  $X$  eine nichtleere Menge.

- (a) Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot, \cap)$  eine unitäre und kommutative (assoziative)  $\mathbb{Z}_2$ -Algebra ist. Bereits bekannte Resultate aus der Linearen Algebra I und II müssen nicht erneut gezeigt werden sondern können referenziert werden.
- (b) Vergleichen Sie die Struktur der Nullstellen von Polynomen  $p \in \mathbb{Z}_2[t]$  und  $p \in \mathcal{P}(X)[t]$  im Sinne der Einsetzung von Elementen aus  $\mathcal{P}(X)$ , siehe [Hausaufgabe I-7.4 \(Link zur Lösung\)](#).

**Hausaufgabe II-7.4** (Tensorprodukt zweier Algebren)

3 + 4 = 7 Punkte

Es seien  $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$  und  $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$  zwei (assoziative)  $K$ -Algebren mit  $K$ -Basen  $B_V, B_W$ .

- (a) Zeigen Sie, dass der Tensorproduktraum  $(V \otimes W, \oplus_{\otimes}, \odot_{\otimes})$  mit der Abbildung, die durch bilineare Fortsetzung über

$$(v_1 \otimes w_1) \star_{\otimes} (v_2 \otimes w_2) := (v_1 \star_V v_2) \otimes (w_1 \star_W w_2) \quad \text{für } v_1 \otimes w_1 \text{ und } v_2 \otimes w_2 \text{ aus } B_V \otimes B_W$$

definiert ist, eine (assoziative)  $K$ -Algebra ist.

- (b) Es seien  $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$  und  $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$  zusätzlich unitär und nicht Nullalgebren. Zeigen Sie, dass

$$V \ni v \mapsto v \otimes 1_W \in V \otimes 1_W \quad \text{und} \quad W \ni w \mapsto 1_V \otimes w \in 1_V \otimes W$$

Algebraisomorphismen zwischen Algebren mit Eins sind.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf [Mampf](#) ein.