# Übung II - 7 (Lösung)

Ausgabedatum: 27. Mai 2024
Abgabedatum: 3. Juni 2024

**Hausaufgabe II-7.1** (Zum charakteristischen Polynom) 1.5 + 1.5 + 1 + 1.5 + 0.5 = 6 Punkte

In dieser Aufgabe sei $n \in \mathbb{N}$, $K$ ein Körper, $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Es sei $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + t^n \in K[t]$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der **Begleitmatrix**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit $p$ übereinstimmt.

(b) Es sei $W$ ein $f$-invarianter Unterraum von $V$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $f|_W^W$ das charakteristische Polynom von $f$ teilt.

(c) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der dualen Abbildung $f^* \in \operatorname{End}(V^*)$ mit dem von $f$ übereinstimmt.

(d) Es sei $f$ zusätzlich invertierbar. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $f^{-1}$ in Abhängigkeit des charakteristischen Polynoms von $f$.

(e) Zeigen Sie, dass wenn das charakteristische Polynom von $f$ durch $\chi_f = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_i \in K$ gegeben ist, dann ist

$$\operatorname{trace}(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \det(f) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Lösung.**

(a) Durch Zeilentransformationen (in Schritt $k$ für $k = n, \ldots, 2$ addiert man das $\lambda$-fache der dann $k$-ten Zeile auf die $k-1$-te Zeile) findet man die Folge der Matrizen

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda+\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \lambda(\lambda+\alpha_{n-1})+\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda+\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \lambda^2+\lambda\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda+\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}\alpha_{n-1}+\ldots\alpha_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{n-2}+\lambda^{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \lambda^2+\lambda\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda+\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich, wenn man nach der ersten Zeile entwickelt, dass

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}\alpha_{n-1}+\ldots\alpha_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{n-2}+\lambda^{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \lambda^2+\lambda\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \lambda+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\, p \underbrace{\det(-I_{n-1})}_{(-1)^{n-1}} = p.$$

(1.5 Punkte)

(b) Wir ergänzen eine Basis $B_W$ von $W$ zu einer Basis $B_V$ von $V$. Bezüglich dieser Basis hat $f$ die Darstellungsmatrix der Blockgestalt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle\dim(W) & \scriptstyle n-\dim(W) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}_{B_W}^{B_W}(f|_W^W) & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \scriptstyle\dim(W) \\ \scriptstyle n-\dim(W) \end{array}.$$

Auf Grund der blockweise bestimmbaren Determinanten einer Blockdreiecksmatrix (Lemma 23.10) ist

$$\begin{aligned} \chi_f = \det\left(\lambda I_n - \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)\right) &= \det\left(\lambda I_{\dim(W)} - \mathcal{M}_{B_W}^{B_W}(f)\right) \det\left(\lambda I_{n-\dim(W)} - A_{22}\right) \\ &= \chi_{f|_W^W} \underbrace{\det\left(\lambda I_{n-\dim(W)} - A_{22}\right)}_{\in K_{n-\dim(W)}[t]}. \end{aligned}$$

(1.5 Punkte)

(c) Es sei $B$ eine Basis von $V$ mit dualer Basis $B^*$ von $V^*$. Aus Satz 21.33 wissen wir, dass $\mathcal{M}_B^B(f) = \mathcal{M}_{B^*}^{B^*}(f^*)^\intercal$ und daher

$$\chi_f = \det\left(\lambda I - \mathcal{M}_B^B(f)\right) = \det\left(\left(\lambda I - \mathcal{M}_B^B(f)\right)^\intercal\right) = \det\left(\lambda I - \mathcal{M}_B^B(f)^\intercal\right) = \det\left(\lambda I - \mathcal{M}_{B^*}^{B^*}(f^*)\right) = \chi_{f^*}.$$

(1 Punkt)

(d) Für eine Basis $B$ von $V$ und $A \coloneqq \mathcal{M}_B^B(f)$ ist

$$\begin{aligned} \chi_{f^{-1}} &= \det(\lambda I - A^{-1}) = \det(\lambda A A^{-1} - A^{-1}) = \det(A^{-1}) \det(\lambda A - I) \\ &= (-1)^n \det(A^{-1}) \lambda^n \det\left(\frac{1}{\lambda} I - A\right) = (-1)^n \det(A^{-1}) \lambda^n \chi_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Hat $\chi_f$ also die Darstellung

$$\chi_f = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \lambda^n,$$

dann hat $\chi_{f^{-1}}$ die Darstellung

$$\chi_{f^{-1}} = \underbrace{(-1)^n \det(A^{-1})}_{=\frac{1}{\alpha_0} \neq 0} \lambda^n \chi_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^n + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \lambda^{n-1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_0}.$$

(1.5 Punkte)

(e) Das ist eine direkte Konsequenz von Satz 24.19 und dem Ausmultiplizieren der Linearfaktoren in der Darstellung von $\chi_f$ und ablesen des Koeffizienten niedrigster und zweithöchster Ordnung. (0.5 Punkte)

**Hausaufgabe II-7.2** (Eigenwertuntersuchungen) 2.5 + 2.5 + 0.5 + 1.5 = 7 Punkte

Bestimmen Sie für alle unten stehenden Endomorphismen/Matrizen die Eigenwerte sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit. Bestimmen Sie weiterhin zu allen Eigenwerten die Eigenräume und dazugehörige Basen. Geben Sie jeweils so früh wie möglich in Ihrer Untersuchung an, ob der Endomorphismus/die Matrix diagonalisierbar ist.

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 9 & 10 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_{11}^{4\times 4}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$

(d) $(\mathcal{P}(\llbracket 1,5 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni A \mapsto A \cap 2\mathbb{N} \in (\mathcal{P}(\llbracket 1,5 \rrbracket), \triangle, \cdot)$ jeweils über dem Körper $\mathbb{Z}_2$

**Lösung.**

In dieser Aufgabe werden alle Matrizen aus der Aufgabenstellung (ebenso wie Darstellungsmatrizen der Endomorphismen) mit $A$ bezeichnet, die Endomorphismen heißen $f$. Das Vorgehen ist in allen Fällen wie folgt:

1. (Wenn nötig) Darstellungsmatrix des Endomorphismus bestimmen.

2. Charakteristisches Polynom der Darstellungsmatrix durch ausrechnen einer Determinante bestimmen.

3. Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen, das sind die Eigenwerte. **Beachte:** Das Bestimmen der Nullstellen ist der einzige nichttriviale Teil dieses Vorgehens.

4. Aus dem charakteristischen Polynom alle Linearfaktoren rausfaktorisieren, dann die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte direkt ablesen.

5. Für jeden Eigenwert $\lambda$ den $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda \mathrm{id} - f)$ und eine Basis von diesem Eigenraum durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems bestimmen. Die Dimensionen ergeben die geometrische Vielfachheit.

Während dieses Prozesses kann man an den entsprechenden Stellen entscheiden:

1. Gibt es $n$ verschiedene Eigenwerte, dann ist der Endomorphismus diagonalisierbar.

2. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte ist nicht $n$? Dann ist der Endomorphismus nicht diagonalisierbar.

3. Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten stimmen für einen Eigenwert nicht überein? Dann ist der Endomorphismus nicht diagonalisierbar.

4. Die Summe der algebraischen und die Summe der geometrischen Vielfachheiten sind jeweils $n$? Dann ist der Endomorphismus diagonalisierbar.

Nun zu Lösung der Aufgaben:

(a) Die Matrix ist vollbesetzt und zeigt keine besondere Struktur, für die Bestimmung des charakteristischen Polynoms führen wir ein paar Zeilentransformationen durch bis die Matrix einfachere Struktur hat. Konkret ist (Transformationen, dann Laplace nach der ersten Spalte)

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det\begin{pmatrix} \lambda-7 & -3 & -2 \\ -9 & \lambda-10 & -2 \\ -2 & -10 & \lambda-7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda+4 & 8 & 9 \\ 2 & \lambda+1 & 9 \\ 9 & 1 & \lambda+4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda+4 & 8 & 9 \\ 2 & \lambda+1 & 9 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda+2)\det\begin{pmatrix} \lambda+4 & 8 & 9 \\ 2 & \lambda+1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda+2)\left((\lambda+4)(\lambda+1-9) - 2(8-9)\right) \\
&= (\lambda+2)\left(\lambda^2+7\lambda+3\right) \\
&= (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3) = (\lambda-9)(\lambda-1)(\lambda-3).
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind auf Grund des endlichen Körpers durch Ausprobieren auffindbar. (1 Punkt)

Die Eigenwerte sind also $1, 3, 9$, jeweils mit einfacher algebraischer Vielfachheit. Es gibt $n = 3$ verschiedene Eigenwerte, wir wissen also schon jetzt, dass die Matrix diagonalisierbar ist. (0.5 Punkte)

Für die Bestimmung der Eigenräume gilt es nun also, die Systeme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & 10 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

zu lösen. Zeilentransformationen auf Stufenform liefern

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und damit

$$\operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \operatorname{Eig}(A,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \operatorname{Eig}(A,9) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Diese Eigenvektoren bilden (wie wir aus der Diagonalisierbarkeit wissen) eine Basis des $\mathbb{Z}_{11}^3$ und die Matrix $A$ hat nach Basiswechsel auf diese Basis die Diagonaldarstellung mit $1, 3$ und $9$ auf der Diagonalen. (1 Punkt)

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix ist direkt ablesbar, denn diese ist trigonal. Offensichtlich zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren mit der Gestalt $(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$, damit sind die Eigenwerte 1 und 2, beide mit algebraischer Vielfachheit 2. (0.5 Punkte)

Für die Bestimmung der Eigenräume gilt es nun also, die Systeme

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & a & b & c & 0 \\ 0 & -1 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

zu lösen. Durch Zeilentransformationen auf Stufenform für die erste Matrix erhalten wir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & a & b & c & 0 \\ 0 & -1 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Am Rang der Matrizen erkennt man sofort (Anzahl der Nullspalten/-zeilen), dass genau dann $\operatorname{Eig}(A,1) = 2$ ist, wenn $a = 0$ ist, und dass $\operatorname{Eig}(A,2) = 2$ genau dann, wenn $f = 0$ ist. Die Matrix ist also genau dann diagonalisierbar, wenn $a = f = 0$. (1 Punkt)

Für $\operatorname{Eig}(A,1)$ liest man also ab, dass die geometrische Vielfachheit genau dann 1 ist, wenn $a \neq 0$ ist, anderenfalls ist sie 2 und Basen des Eigenraums sind beispielsweise $(e_1)$ bzw. $(e_1, e_2)$.

Für $\operatorname{Eig}(A,2)$ folgt entsprechend, dass die geometrische Vielfachheit genau dann 1 ist, wenn $f \neq 0$ ist, anderenfalls ist sie zwei und Basen des Eigenraums sind beispielsweise $(e_3 + de_2 + (b+da)e_1)$ bzw. $(e_4 + ee_2 + (ea+c)e_1, e_3 + de_2 + (da+b)e_1)$. (1 Punkt)

(c) Bei der gegebenen Matrix handelt es sich um eine Begleitmatrix. Nach Hausaufgabe II-7.1 wissen wir also sofort, dass das charakteristische Polynom durch $p = 2 + 3t^2 + t^4$ gegeben ist. Über $\mathbb{Q}$ hat dieses Polynom jedoch keine einzige Nullstelle, denn die dazugehörige Polynomfunktion hat überall Werte größer oder gleich 2. Die Matrix ist also nicht diagonalisierbar, denn sie hat keinen einzigen Eigenwert. (0.5 Punkte)

(d) Wir könnten direkt mit dem angegebenen Endomorphismus arbeiten, man sieht zum Beispiel leicht, dass es sich hier um einen Projektor handelt, damit kann man weiterarbeiten. Der Übersicht halber folgen wir aber dem oben beschriebenen Vorgehen. Wir wählen die Punktmengenbasis $PM := (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\})$ und erhalten die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{PM}^{PM}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{5\times 5}$$

also bereits eine Diagonalmatrix, damit ist klar, dass der Endomorphismus diagonalisierbar ist. Die Eigenwerte sind 1 und 0 (wie von einem Projektor zu erwarten war) jeweils mit übereinstimmender algebraischer und geometrischer Vielfachheit von 2 bzw. 3 und Basen $(e_2, e_4)$ bzw. $(e_1, e_3, e_5)$. (1.5 Punkte)

**Hausaufgabe II-7.3** (Teilmengenalgebra über $\mathbb{Z}_2$) 2 + 2 = 4 Punkte

Es sei $X$ eine nichtleere Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot, \cap)$ eine unitäre und kommutative (assoziative) $\mathbb{Z}_2$-Algebra ist. Bereits bekannte Resultate aus der Linearen Algebra I und II müssen nicht erneut gezeigt werden sondern können referenziert werden.

(b) Vergleichen Sie die Struktur der Nullstellen von Polynomen $p \in \mathbb{Z}_2[t]$ und $p \in \mathcal{P}(X)[t]$ im Sinne der Einsetzung von Elementen aus $\mathcal{P}(X)$, siehe Hausaufgabe I-7.4 (Link zur Lösung).

**Lösung.**

(a) Aus Hausaufgabe I-6.3 wissen wir, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring mit 1 (nämlich $X$) ist. Aus Hausaufgabe I-8.1 wissen wir, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist (wobei hier erst definiert wurde, was die skalare Multiplikation eigentlich zu sein hat). Es bleibt also noch die Verträglichkeit der Verknüpfungen $\cap$ und $\cdot$ miteinander zu überprüfen, was genau der Bilinearität von $\cap$ als Abbildung von $\mathcal{P}(X)^2$ nach $\mathcal{P}(X)$ entspricht. Es muss also für beliebige $A, B \subseteq X$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_2$

$$(\alpha \cdot A) \cap B = \alpha \cdot (A \cap B) = A \cap (\alpha \cdot B)$$

gelten. Der zugrunde liegende Körper $\mathbb{Z}_2$ besteht nur aus 0 und 1, wir prüfen also einfach die beiden Fälle für $\alpha$ separat. Man sieht:

$$A \cap (0 \cdot B) = A \cap \emptyset = \emptyset = \emptyset \cap B = (0 \cdot A) \cap B = 0 \cdot (A \cap B)$$

sowie

$$A \cap (1 \cdot B) = A \cap B = (1 \cdot A) \cap B = 1 \cdot (A \cap B).$$

(2 Punkte)

(b) Polynome aus $\mathbb{Z}_2[t]$ haben die Struktur

$$\alpha_0 \cdot t^0 \triangle \alpha_1 \cdot t \triangle \ldots \triangle \alpha_n \cdot t^n, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_2$$

während Polynome aus $\mathcal{P}(X)[t]$ die Struktur

$$A_0 \cap t^0 \triangle A_1 \cap t \triangle \ldots \triangle A_n \cap t^n, \quad A_i \in \mathcal{P}(X)$$

haben. In beiden Fällen ergibt die Auswertung der Potenzterme $t^n = t \cap t \cap \cdots \cap t = t$ für $n \geqslant 1$, und $t^0$ ist das ringmultiplikativ-neutrale Element, also $X$, daher ist

$$\alpha_0 \cdot t^0 \triangle \alpha_1 \cdot t \triangle \ldots \triangle \alpha_n \cdot t^n = \alpha_0 \cdot X \triangle (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot t$$

und

$$A_0 \cap t^0 \triangle A_1 \cap t \triangle \ldots \triangle A_n \cap t^n = A_0 \triangle (A_1 \triangle \ldots \triangle A_n) \cap t.$$

Beim Einsetzen von Elementen aus $\mathcal{P}(X)$ ist das Resultat wieder in $\mathcal{P}(X)$. Die Nullstellensuche ist in beiden Fällen also die Frage, wann die Auswertung die leere Menge ergibt. Die Nullstellenstruktur der Polynome in $\mathcal{P}(X)[t]$ ist in Hausaufgabe I-7.4 aufgearbeitet, hier kommt es darauf an, wie die Mengen $A_0$ und $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ bezüglich der Mengeninklusion vergleichbar sind. Hingegen kommt es bei den Nullstellen von

$$\alpha_0 \cdot X \triangle (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot t$$

gerade auf die Anzahl der nicht-Null-Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und den Wert von $\alpha_0$ an. Die hier auftretenden Fälle sind

1. $\alpha_0 = 0_{\mathbb{Z}_2}$, hier verbleibt $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot t$. Ist eine gerade Anzahl von Koeffizienten im Indexbereich 1 bis $n$ mit dem Wert $1_{\mathbb{Z}_2}$ belegt, dann handelt es sich um das Nullpolynom und jedes Algebraelement ist eine Nullstelle. Bei einer ungeraden Anzahl von Koeffizienten handelt es sich um das Polynom $t$ und nur die leere Menge ist eine Nullstelle.

2. $\alpha_0 = 1_{\mathbb{Z}_2}$, hier verbleibt das Komplement von $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot t$. Bei einer geraden Anzahl von $1_{\mathbb{Z}_2}$-Koeffizienten ist hier also keine Nullstelle vorhanden, anderenfalls ist nur $X$ eine Nullstelle.

(2 Punkte)

**Hausaufgabe II-7.4** (Tensorprodukt zweier Algebren) $3 + 4 = 7$ Punkte

Es seien $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$ und $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$ zwei (assoziative) $K$-Algebren mit $K$-Basen $B_V$, $B_W$.

(a) Zeigen Sie, dass der Tensorproduktraum $(V \otimes W, \oplus_\otimes, \odot_\otimes)$ mit der Abbildung, die durch bilineare Fortsetzung über

$$(v_1 \otimes w_1) \star_\otimes (v_2 \otimes w_2) \coloneqq (v_1 \star_V v_2) \otimes (w_1 \star_W w_2) \quad \text{für } v_1 \otimes w_1 \text{ und } v_2 \otimes w_2 \text{ aus } B_V \otimes B_W$$

definiert ist, eine (assoziative) $K$-Algebra ist.

(b) Es seien $(V, \oplus_V, \odot_V, \star_V)$ und $(W, \oplus_W, \odot_W, \star_W)$ zusätzlich unitär und nicht Nullalgebren. Zeigen Sie, dass

$$V \ni v \mapsto v \otimes 1_W \in V \otimes 1_W \quad \text{und} \quad W \ni w \mapsto 1_V \otimes w \in 1_V \otimes W$$

Algebraisomorphismen zwischen Algebren mit Eins sind.

**Lösung.**

(a) Wir wissen bereits, dass $(V \otimes W, \oplus_\otimes, \odot_\otimes)$ einen Vektorraum ergibt. Die Abbildung $\star_\otimes$ ist per Definition bilinear, es bleibt also nur zu zeigen, dass $(V \otimes W, \oplus_\otimes, \star_\otimes)$ ein Ring ist.

Dass $(V \otimes W, \oplus_\otimes)$ eine abelsche Gruppe ist, wissen wir schon aus der Vektorraumeigenschaft. Die Distributivgesetze sind Teil der Bilinearität von $\star_\otimes$ im Tensorproduktraum, es verbleibt also nur die Assoziativität von $\star_\otimes$ zu prüfen, damit $(V \otimes W, \star_\otimes)$ eine Halbgruppe ergibt.

Zuerst zeigen wir, dass für beliebige $v^1 \otimes w^1$ und $v^2 \otimes w^2$ aus $V \otimes W$ (nicht nur aus $B_V \otimes B_W$) ebenfalls $v^1 \otimes w^1 \star_\otimes v^2 \otimes w^2 = (v_1 \star_V v_2) \otimes (w_1 \star_W w_2)$ gilt. Es gilt nämlich mit den Basisdarstellungen dieser Vektoren

$$v^{1/2} = \sum_{i_{1/2}=1}^{n_V} \alpha^{1/2}_{i_{1/2}} v_{i_{1/2}} \quad \text{und} \quad w^{1/2} = \sum_{j_{1/2}=1}^{n_W} \beta^{1/2}_{j_{1/2}} w_{j_{1/2}}$$

mit $v_i, w_j$ aus $B_V$ bzw. $B_W$:

$$\begin{aligned}
(v^1 \otimes w^1) \star_\otimes (v^2 \otimes w^2) &= \left( \sum_{i_1=1}^{n_V} \alpha_{i_1}^1 v_{i_1} \otimes \sum_{j_1=1}^{n_W} \beta_{j_1}^1 w_{j_1} \right) \star_\otimes \left( \sum_{i_2=1}^{n_V} \alpha_{i_2}^2 v_{i_2} \otimes \sum_{j_2=1}^{n_W} \beta_{j_2}^2 w_{j_2} \right) \\
&= \left( \sum_{i_1=1}^{n_V} \sum_{j_1=1}^{n_W} \alpha_{i_1}^1 \beta_{j_1}^1 (v_{i_1} \otimes w_{j_1}) \right) \star_\otimes \left( \sum_{i_2=1}^{n_V} \sum_{j_2=1}^{n_W} \alpha_{i_2}^2 \beta_{j_2}^2 (v_{i_2} \otimes w_{j_2}) \right) \\
&= \sum_{i_1,i_2=1}^{n_V} \sum_{j_1,j_2=1}^{n_W} \alpha_{i_1}^1 \beta_{j_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \beta_{j_2}^2 (v_{i_1} \otimes w_{j_1}) \star_\otimes (v_{i_2} \otimes w_{j_2}) \\
&= \sum_{i_1,i_2=1}^{n_V} \sum_{j_1,j_2=1}^{n_W} \alpha_{i_1}^1 \beta_{j_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \beta_{j_2}^2 (v_{i_1} \star_V v_{i_2}) \otimes (w_{j_1} \star_W w_{j_2}) \\
&= \sum_{i_1,i_2=1}^{n_V} \sum_{j_1,j_2=1}^{n_W} (\alpha_{i_1}^1 v_{i_1} \star_V \alpha_{i_2}^2 v_{i_2}) \otimes (\beta_{j_1}^1 w_{j_1} \star_W \beta_{j_2}^2 w_{j_2}) \\
&= (v^1 \star_V v^2) \otimes (w^1 \star_W w^2).
\end{aligned}$$

(1.5 Punkte)

Diese Eigenschaft wird an der rot markierten Stelle in der kommenden Umformung für den Nachweis der Assoziativität benötigt. Für deren Nachweis seien nun Tensoren

$$t_i = \sum_{j_i=1}^{k} \alpha_{j_i}^i \left( v_{j_i} \otimes w_{j_i} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

gegeben mit $v_j \otimes w_j$ aus $B_V \otimes B_W$. Dann ist auf Grund der Assoziativität von $\star_V$ und $\star_W$ und der Bilinearität der Ringmultiplikationen:

$$\begin{aligned}
(t_1 \star_\otimes t_2) \star_\otimes t_3 &= \left( \sum_{j_1=1}^{k} \alpha_{j_1}^1 \left( v_{j_1} \otimes w_{j_1} \right) \star_\otimes \sum_{j_2=1}^{k} \alpha_{j_2}^2 \left( v_{j_2} \otimes w_{j_2} \right) \right) \star_\otimes \sum_{j_3=1}^{k} \alpha_{j_3}^3 \left( v_{j_3} \otimes w_{j_3} \right) \\
&= \left( \sum_{j_1,j_2=1}^{k} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \left( v_{j_1} \otimes w_{j_1} \star_\otimes v_{j_2} \otimes w_{j_2} \right) \right) \star_\otimes \sum_{j_3=1}^{k} \alpha_{j_3}^3 \left( v_{j_3} \otimes w_{j_3} \right) \\
&= \left( \sum_{j_1,j_2=1}^{k} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \left( v_{j_1} \star_V v_{j_2} \otimes w_{j_1} \star_W w_{j_2} \right) \right) \star_\otimes \sum_{j_3=1}^{k} \alpha_{j_3}^3 \left( v_{j_3} \otimes w_{j_3} \right) \\
&= \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{k} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_3}^3 \left( v_{j_1} \star_V v_{j_2} \otimes w_{j_1} \star_W w_{j_2} \right) \star_\otimes \left( v_{j_3} \otimes w_{j_3} \right) \\
&= \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{k} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_3}^3 \left( (v_{j_1} \star_V v_{j_2}) \star_V v_{j_3} \otimes (w_{j_1} \star_W w_{j_2}) \star_W w_{j_3} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{k} \alpha^1_{j_1}\alpha^2_{j_2}\alpha^3_{j_3} \big(v_{j_1} \star_V (v_{j_2} \star_V v_{j_3}) \otimes w_{j_1} \star_W (w_{j_2} \star_W w_{j_3})\big) \\
&= \dots \\
&= t_1 \star_\otimes (t_2 \star_\otimes t_3)
\end{aligned}
$$

wobei die fehlenden Zwischenschritte die gleichen Transformationen wie vorher rückgängig machen. (1.5 Punkte)

(b) Für beide Räume sind die Argumente analog zueinander, wir zeigen also nur die Aussagen für die Einbettung von $V$ in $V \otimes W$. Als erstes ist dafür zu zeigen, dass $(V \otimes 1_W, \oplus_\otimes, \odot_\otimes, \star_\otimes)$ eine unitäre $K$-Unteralgebra von $(V \otimes W, \oplus_\otimes, \odot_\otimes, \star_\otimes)$ ist, also dass sowohl Unterraum- als auch Unterringstruktur (mit Eins) vorliegt.

Wir verwenden das Unterraumkriterium und prüfen, ob die $0 \in V \otimes W$ in $V \otimes 1_W$ liegt, was sie tut, nämlich in Form von $0_V \otimes 1_W$, was auf Grund der Bilinearität des Tensorprodukts $\otimes$ der Nulltensor im Tensorproduktraum sein muss. Abgeschlossenheit bezüglich der Vektorraumverknüpfungen folgt ebenfalls aus der Bilinearität, denn für Skalare $\alpha \in K$ und $v_1 \otimes 1_W$ und $v_2 \otimes 1_W$ ist

$$\alpha \odot_\otimes (v_1 \otimes 1_W) \oplus_\otimes v_2 \otimes 1_W = ((\alpha \odot_V v_1) \otimes 1_W) \oplus_\otimes v_2 \otimes 1_W = ((\alpha \odot_V v_1) \oplus_V v_2) \otimes 1_W \in V \otimes 1_W.$$

(1 Punkt)

Da wir die Untergruppeneigenschaft mit der Unterraumeigenschaft schon mitgezeigt haben verbleibt von der Unterringeigenschaft lediglich die Abgeschlossenheit bezüglich $\star_\otimes$, welche man anhand Definition von $\star_\otimes$, beziehungsweise dem oben gezeigten Verhalten auf einfachen Tensoren, und der Neutralität von $1_W$ bezüglich $\star_W$ einsieht, denn es ist

$$(v_1 \otimes 1_W) \star_\otimes (v_2 \otimes 1_W) = (v_1 \star_V v_2) \otimes (1_W \star_W 1_W) = (v_1 \star_V v_2) \otimes 1_W \in V \otimes 1_W.$$

(1 Punkt)

Weiterhin ist $1_V \otimes 1_W$ wegen

$$(v \otimes w) \star_\otimes (1_V \otimes 1_W) = (v \star_V 1_V) \otimes (w \star_\otimes 1_W) = v \otimes w$$

das neutrale Element in der Algebra $V \otimes W$ und liegt damit auch in beiden Unteralgebren. Die Unteralgebreneigenschaft liegt also auch im Sinne von Algebren mit Eins vor. (0.5 Punkte)

Es bleibt die Strukturverträglichkeit zu zeigen und Invertierbarkeit von $f\colon V \ni v \mapsto v \otimes 1_W \in V \otimes 1_W$ zu zeigen. Für die Strukturverträglichkeit seien $\alpha \in K$ und $v_1, v_2 \in V$. Dann ist (wieder wegen der Bilinearität des Tensorprodukts)

$$f(\alpha \odot_V v_1 \oplus_V v_2) = (\alpha \odot_V v_1 \oplus_V v_2) \otimes 1_W = \alpha \odot_\otimes (v_1 \otimes 1_W) \oplus_\otimes (v_2 \otimes 1_W) = \alpha \odot_\otimes f(v_1) \oplus_\otimes (v_2)$$

$$f(v_1 \star_V v_2) = (v_1 \star_V v_2) \otimes 1_W = (v_1 \star_V v_2) \otimes (1_W \star_W 1_W) = (v_1 \otimes 1_W) \star_\otimes (v_2 \otimes 1_W) = f(v_1) \star_\otimes f(v_2).$$

(1 Punkt)

Es bleibt die Invertierbarkeit von $f$ zu zeigen. Diese liegt genau dann vor, wenn $\operatorname{Kern}(f) = \{0_V\}$, also wenn genau dann $f(v) = v \otimes 1_W = 0_\otimes$ ist, wenn $v = 0_V$ ist. Da $v \otimes w = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ oder $w = 0$ und $1_W \neq 0_W$ wegen der Nichtnullalgebrenvoraussetzung muss $v = 0_V$ sein. (0.5 Punkte)

Dass $1_V \mapsto 1_V \otimes 1_W = 1_\otimes$ ist, ist offensichtlich, damit haben wir Algebrenisomorphie im Sinne mit Einsen.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.