R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 6

Ausgabedatum: 20. Mai 2024
Abgabedatum: 27. Mai 2024

Hausaufgabe II-6.1 (Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen) 3 Punkte

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \operatorname{End}(f)$. Zeigen Sie *mindestens drei* der Aussagen aus Lemma 23.22, also der folgenden Eigenschaften der Determinante von Endomorphismen:

(a) $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.

(b) $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ Jede Darstellungsmatrix von f ist invertierbar.

(c) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(d) $\det(f \circ g) = \det(f)\ \det(g)$.

(e) $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.

(f) $\det(f^*) = \det(f)$.

Hausaufgabe II-6.2 (Geordnete Körper und Orientierung eines Vektorraums) 2 + 1.5 + 1 + 1.5 = 6 Punkte

(a) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

 (i) Ist K mit $\leqslant$ ein geordneter Körper, dann sind die positiven Zahlen $P := \{x \in K \mid x > 0\}$ abgeschlossen bzgl. der Körperoperationen und für jedes $y \in K$ gilt genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$.

(ii) Gibt es eine Menge $P \subseteq K$, die bezüglich der Körperoperationen abgeschlossen ist, so dass für jedes $y \in K$ genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$ gilt, dann ist K mit $x \leqslant y :\Leftrightarrow y - x \in P \vee x = y$ ein geordneter Körper.

Beachte: Einen Körper können wir also äquivalent darüber ordnen, dass wir die Ordnung direkt angeben, oder darüber, dass wir die positiven Zahlen kennzeichnen.

(b) Es sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ über dem geordneten Körper K. Zeigen Sie, dass es genau zwei Äquivalenzklassen von gleichorientierten Basen gibt.

(c) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien B_V und $\widehat{B}_V$ Basen von V mit dazugehörigen dualen Basen $B_V^*, \widehat{B}_V^*$ von V^*. Zeigen Sie, dass B_V und $\widehat{B}_V$ genau dann gleichorientiert sind, wenn es B_V^* und $\widehat{B}_V^*$ sind.

(d) Geben Sie an, welche der folgenden Basen des $\mathbb{R}_2[t]$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung $\leqslant$ untereinander umgekehrt/gleichorientiert sind:

$$B_1 \coloneqq (1, 1{+}t, 1{+}t{+}t^2), \quad B_2 \coloneqq (1{+}t, 1, 1{+}t{+}t^2), \quad B_3 \coloneqq (3{+}3t, 2, -1{-}t{-}t^2), \quad B_4 \coloneqq (1{+}2t, 3{+}5t^2, t)$$

Hausaufgabe II-6.3 (Eigenschaften von Eigenräumen von Endomorphismen) 3 Punkte

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$ sowie $\lambda \in K$. Zeigen Sie *mindestens drei* der Aussagen von Lemma 24.7 also der folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von V.

(b) $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f.

(c) $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.

(d) $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Kern}(\lambda\, \mathrm{id}_V - f)$.

(e) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschieden, dann gilt $\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$.

Hausaufgabe II-6.4 (Eigenwerte, -vektoren und -räume) 2.5 + 2.5 + 2 + 1 = 8 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume der folgenden reellen Matrizen.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Beachte: Wir haben noch keine Methodik, um Eigenwerte von Endomorphismen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen zu bestimmen. Die obigen Beispiele lassen sich mit der Definition und schon bekannten Argumenten behandeln.

(b) Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$ und $S_l, S_r\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Links- bzw. Rechtsshift, also $S_l(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ und $S_r(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und deren geometrischen Vielfachheiten von S_l, S_r sowie $S_l + S_r$. **Hinweis:** Sie dürfen das Wissen aus Hausaufgabe II-2.4 voraussetzen.

(c) Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus als einzigen Eigenwert die Null hat.

(d) Es sei V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass wenn $f^2 + f$ den Eigenwert -1 hat, dann hat f^3 den Eigenwert 1.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.