R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 6 (Lösung)

Ausgabedatum: 20. Mai 2024
Abgabedatum: 27. Mai 2024

Hausaufgabe II-6.1 (Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen) 3 Punkte

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \operatorname{End}(f)$. Zeigen Sie *mindestens drei* der Aussagen aus Lemma 23.22, also der folgenden Eigenschaften der Determinante von Endomorphismen:

(a) $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.

(b) $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ Jede Darstellungsmatrix von f ist invertierbar.

(c) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(d) $\det(f \circ g) = \det(f)\ \det(g)$.

(e) $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.

(f) $\det(f^*) = \det(f)$.

Lösung.

Je ein Punkt pro Aussage, also (3 Punkte).

(a) Die Skalierung des Endomorphismus f zu αf skaliert jedes Bild mit α, die Spalten jeder Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ für eine beliebige Basis B_V von V sind also mit α skaliert. Die n-Linearität der Determinante liefert das Ergebnis.

(b) Es ist genau dann $\det(f) \neq 0$ wenn jede Darstellungsmatrix von f invertierbar ist, weil die Determinante des Endomorphismus genau über die Determinante der Darstellungsmatrizen definiert ist (was nur geht, weil diese ähnlich sind).

Das ist wiederum äquivalent zu $\operatorname{Rang}(f) = n$, da $\operatorname{Rang}(f)$ mit dem Rang jeder Darstellungsmatrix übereinstimmt.

Das ist wiederum auf Grund des Dimensionssatzes äquivalent dazu, dass f invertierbar ist.

(c) Es ist $\det(\mathrm{id}_V) = 1$, weil die Darstellungsmatrizen bezüglich gleicher Basen im Urbild- und Bildraum immer die Einheitsmatrix sind.

(d) Nach Satz 19.8 gilt für jede beliebige Basis B_V von V

$$\det(f \circ g) = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f \circ g)) = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f))\ \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(g)) = \det(f)\ \det(g).$$

(e) Die Behauptung folgt sofort aus der Beziehung

$$\det(f^{-1)} = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f^{-1})) = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)^{-1}) = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f))^{-1}$$

für jede beliebige Basis B_V von V unter Verwendung von Satz 19.12.

(f) Die Behauptung folgt sofort aus der Beziehung

$$\det(f^*) = \det(\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V^*}(f^*)) = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)^\intercal) = \det(\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)) = \det(f)$$

für jede beliebige Basis B_V von V und der dazugehörigen dualen Basis B_V^* von V^* unter Verwendung von Satz 21.33.

Hausaufgabe II-6.2 (Geordnete Körper und Orientierung eines Vektorraums) $2 + 1.5 + 1 + 1.5 = 6$ Punkte

(a) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist K mit $\leqslant$ ein geordneter Körper, dann sind die positiven Zahlen $P \coloneqq \{x \in K \mid x > 0\}$ abgeschlossen bzgl. der Körperoperationen und für jedes $y \in K$ gilt genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$.

(ii) Gibt es eine Menge $P \subseteq K$, die bezüglich der Körperoperationen abgeschlossen ist, so dass für jedes $y \in K$ genau eine der Aussagen $y = 0$, $y \in P$, $-y \in P$ gilt, dann ist K mit $x \leqslant y :\Leftrightarrow y - x \in P \vee x = y$ ein geordneter Körper.

Beachte: Einen Körper können wir also äquivalent darüber ordnen, dass wir die Ordnung direkt angeben, oder darüber, dass wir die positiven Zahlen kennzeichnen.

(b) Es sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ über dem geordneten Körper K. Zeigen Sie, dass es genau zwei Äquivalenzklassen von gleichorientierten Basen gibt.

(c) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien B_V und $\widehat{B}_V$ Basen von V mit dazugehörigen dualen Basen $B_V^*, \widehat{B}_V^*$ von V^*. Zeigen Sie, dass B_V und $\widehat{B}_V$ genau dann gleichorientiert sind, wenn es B_V^* und $\widehat{B}_V^*$ sind.

(d) Geben Sie an, welche der folgenden Basen des $\mathbb{R}_2[t]$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung $\leqslant$ untereinander umgekehrt/gleichorientiert sind:

$$B_1 \coloneqq (1, 1{+}t, 1{+}t{+}t^2), \quad B_2 \coloneqq (1{+}t, 1, 1{+}t{+}t^2), \quad B_3 \coloneqq (3{+}3t, 2, -1{-}t{-}t^2), \quad B_4 \coloneqq (1{+}2t, 3{+}5t^2, t)$$

Lösung.

(a) (i) Es seien $x, y > 0$. Dann ist $xy \geqslant 0$ auf Grund von der Definition, genauer (23.15b), und die Nullteilerfreiheit im Körper leifert $xy > 0$. Außerdem ist wegen (23.15a) auch $x + y \geqslant x > 0$. Damit sind die positiven Zahlen abgeschlossen unter den Körperverknüpfungen. Die verbleibende Aussage folgt direkt aus Lemma 23.24 Aussage (i). (1 Punkt)

(ii) Die Reflexivität ist in $\leqslant$ schon direkt eingebaut. Für die Antisymmetrie seien $x, y \in K$ mit $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$, also $y - x \in P$ und $x - y = -(y - x) \in P$ oder $x = y$, und somit nach Voraussetzung (Trichotomy) $x = y$. Für die Transitivität seien $x, y, z \in K$ mit $x \leqslant y$ und $y \leqslant z$. Gilt irgendwo Gleichheit, dann folgt die Behauptung sofort, im Fall $y - x \in P$ und $z - y \in P$ ist $z - x = (z - y) + (y - x) \in P$ auf Grund der Abgeschlossenheit unter der Addition. Damit haben wir eine Halbordnung nachgewiesen. Dass tatsächlich eine Totalordnung vorliegt folgt sofort aus der Trichotomyvoraussetzung. Die Körperstrukturverträglichkeit folgt aus der Abgeschlossenheit von P unter Plus und Mal. (1 Punkt)

(b) Da der Körper geordnet ist, ist er unendlich. Da die Raumdimension nach Voraussetzung mindestens 1 ist, gibt es unendlich viele Basen, man kann nämlich in einer beliebigen Basis einen beliebigen Vektor mit allen Körperelementen ungleich Null skalieren.

Da $\operatorname{char}(K) \neq 2$, ist $-1 \neq 1$, entsprechend kann man für eine beliebige Basis B einen der Basisvektoren mit -1 skalieren um eine weitere Basis $\widehat{B}$ zu erhalten. Auf Grund der Multilinearität der Determinante ist dann B umgekehrt orientiert zu $\widehat{B}$, es gibt also mindestens zwei Äquivalenzklassen. **Beachte:** Man sieht hier übrigens auch direkt ein, dass bei Äquivalenzklassen gleichmächtig sind.

Ist nun $\widetilde{B}$ eine beliebige Basis, dann ist $\widetilde{B}$ entweder zu B gleichorientiert und damit in deren

Äquivalenzklasse, oder nicht, in diesem Fall ist $\widetilde{B}$ zu $\widehat{B}$ gleichorientiert, denn es ist

$$\det(\mathcal{T}^{\widetilde{B}_V}_{\widehat{B}_V}) = \det(\mathcal{T}^{B_V}_{\widehat{B}_V}\mathcal{T}^{\widetilde{B}_V}_{B_V}) = \det(\mathcal{T}^{B_V}_{\widehat{B}_V})(\mathcal{T}^{\widetilde{B}_V}_{B_V}) = (-1)\cdot(-1) = 1.$$

(1.5 Punkte)

(c) Es ist

$$\det\left(\mathcal{T}^{B_V}_{\widehat{B}_V}\right) = \det\left(\mathcal{M}^{B_V}_{\widehat{B}_V}(\mathrm{id}_V)\right) = \det\left(\mathcal{M}^{B_V}_{\widehat{B}_V}(\mathrm{id}_V)^\mathsf{T}\right) = \det\left(\mathcal{M}^{\widehat{B}^*_V}_{B^*_V}(\mathrm{id}^*_V)\right) = \det\left(\mathcal{M}^{\widehat{B}^*_V}_{B^*_V}(\mathrm{id}_{V^*})\right) = \det\left(\mathcal{T}^{\widehat{B}^*_V}_{B^*_V}\right).$$

(1 Punkt)

(d) Es reicht zu entscheiden, ob die Basen in der gleichen Äquivalenzklasse liegen und damit ob sie in der gleichen Äquivalenzklasse wie die Monombasis liegen. Die Transformationsmatrizen von den Basen B_i in die Monombasis M haben besonders einfache Struktur, die Koeffizienten können wir nämlich direkt in der Darstellung der Basen ablesen. Es ergeben sich die folgenden Transformationsmatrizen, deren Determinanten wir gern bestimmen möchten:

$$\mathcal{T}^{B_1}_M = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathcal{T}^{B_2}_M = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathcal{T}^{B_3}_M = \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\3 & 0 & -1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathcal{T}^{B_4}_M = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

Nun ist $\mathcal{T}^{B_1}_M$ eine Dreiecksmatrix und damit ist ihre Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also 1. In $\mathcal{T}^{B_2}_M$ ist gegenüber B_1 nur die erste mit der zweiten Spalte vertauscht, also ist hier die Determinante -1. In $\mathcal{T}^{B_2}_M$ sind die Spalten von B_2 mit 3, 2 und -1 multipliziert, hier ist die Determinante also 6. Für $\mathcal{T}^{B_2}_M$ entwickelt man nach der letzten Spalte und erhält die Determinante -5. Gleichorientiert sind also B_1 und B_3 sowie B_4 und B_2. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe II-6.3 (Eigenschaften von Eigenräumen von Endomorphismen) 3 Punkte

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$ sowie $\lambda \in K$. Zeigen Sie *mindestens drei* der Aussagen von Lemma 24.7 also der folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$ ist ein Unterraum von V.

(b) $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f.

(c) $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.

(d) $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Kern}(\lambda\,\mathrm{id}_V - f)$.

(e) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschieden, dann gilt $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$.

Lösung.

Je ein Punkt pro Aussage, also (3 Punkte).

(a) Wir verwenden das Unterraumkriterium. Der Nullvektor ist in jedem Eigenraum enthalten, diese sind also nicht leer. Für $v, w \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ und $\alpha \in K$ ist außerdem

$$f(v + \alpha w) = f(v) + \alpha f(w) = \lambda v + \alpha\lambda w = \lambda(v + \alpha w)$$

und damit $v + \alpha w \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

(b) Per Definition ist λ genau dann Eigenwert, wenn ein $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$ existiert, was genau dann der Fall ist, wenn $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$.

(c) Folgt per Definition, denn die Nullausnahme entspricht genau der Mengensubtraktion.

(d) $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda\, v\} = \{v \in V \mid \lambda\, v - f(v) = 0\} = \operatorname{Kern}(\lambda\, \mathrm{id}_V - f)$

(e) Ist v ein Eigenvektor zu λ_1 und λ_2, dann ist $0 = f(v) - f(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$ und damit $\lambda_1 = \lambda_2$. Im Schnitt verschiedener Eigenräume liegt also nur der Nullvektor.

Hausaufgabe II-6.4 (Eigenwerte, -vektoren und -räume) 2.5 + 2.5 + 2 + 1 = 8 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume der folgenden reellen Matrizen.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Beachte: Wir haben noch keine Methodik, um Eigenwerte von Endomorphismen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen zu bestimmen. Die obigen Beispiele lassen sich mit der Definition und schon bekannten Argumenten behandeln.

(b) Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$ und $S_l, S_r\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Links- bzw. Rechtsshift, also $S_l(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (x_2, x_3, \dots)$ und $S_r(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (0, x_1, x_2, \dots)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und deren geometrischen Vielfachheiten von S_l, S_r sowie $S_l + S_r$. **Hinweis:** Sie dürfen das Wissen aus Hausaufgabe II-2.4 voraussetzen.

(c) Zeigen Sie, dass jeder nilpotente Endomorphismus als einzigen Eigenwert die Null hat.

(d) Es sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass wenn $f^2 + f$ den Eigenwert -1 hat, dann hat f^3 den Eigenwert 1.

Lösung.

(a) Die Matrizen werden im Folgenden alle mit A bezeichnet.

(i) Die Matrix hat Diagonalstruktur, die Eigenwerte stehen also auf der Diagonalen und sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \pi$, $\lambda_3 = e$, $\lambda_4 = 0$, jeweils mit den Eigenräumen $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = \langle e_i \rangle$. Mehr Eigenwerte kann es aus Dimensionsgründen nicht geben. (0.5 Punkte)

(ii) Die Matrix hat obere Dreiecksstruktur. Offensichtlich gibt es also den Eigenwert links oben in der Ecke der Matrix, also $\lambda_1 = 1$ mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 1) = \langle e_1 \rangle$.

Angenommen es gibt nun einen weiteren Eigenwert λ_2 mit dazugehörigem Eigenvektor $(x_1, x_2)^\mathsf{T}$, dann hat dieser notwendigerweise die Eigenschaft $x_2 \neq 0$ und muss $Ax = \lambda_2 x$ erfüllen, also

$$x_1 + 2x_2 = \lambda_2 x_1 \quad \text{und} \quad 4x_2 = \lambda_2 x_2,$$

und damit muss $\lambda_2 = 4$ sein. Für $x_2 = -3$ folgt dann sofort $(1 - \lambda_2)x_1 = 6$ also $x_1 = \frac{6}{1-\lambda_2}$, also der Eigenwert $\lambda_2 = 4$ mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 4) = \langle (-2, -3)^\mathsf{T} \rangle$ Mehr Eigenwerte kann es aus Dimensionsgründen nicht geben. (1 Punkt)

(iii) Für jedes Eigenpaar (λ, x) muss gelten, dass

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda x_i \quad \forall i = 1, \dots, 4.$$

Zieht man diese Gleichungen paarweise voneinander ab, dann erhält man die Bedingung, dass alle x_i gleich sein müssen oder $\lambda = 0$ sein muss. Die Matrix hat offensichtlich Rang Eins, denn alle Zeilen/Spalten sind gleich. Der Kern der Matrix ist die Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ und damit ein $4 - 1 = 3$ dimensionaler Unterraum, also ist 0 ein Eigenwert mit dem, über das lineare Gleichungssystem direkt bestimmbaren, Eigenraum

$$\mathrm{Eig}(A, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ansonten ergibt sich nur noch der Eigenwert $\lambda_2 = 4$ mit $\mathrm{Eig}(A, 4) = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \rangle$. (1 Punkt)

(b) Die Eigenwerte von S_l und S_r kennen wir bereits aus Hausaufgabe II-2.4, S_l hat jeden beliebigen Eigenwert $\lambda_l \in \mathbb{R}$, während S_r keinen Eigenwert besitzt, denn die Eigenwerteigenschaft liefert

$$(x_2, x_3, \dots) = S_l(x_1, x_2, \dots) = \lambda_l(x_1, x_2, \dots)$$

$$(0, x_1, x_2, \dots) = S_r(x_1, x_2, \dots) = \lambda_r(x_1, x_2, \dots).$$

Das liefert für den Linksschift, dass $x_{n+1} = \lambda_l x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit Bedingungen für alle Einträge bis auf den ersten, der frei wählbar ist. Für jedes beliebige λ_l und $x_1 \in \mathbb{R}$ ergibt sich dann der Eigenvektor $x_{\lambda_l} := (x_1, \lambda_l x_1, \dots, \lambda_l^{k-1} x_k, \dots)$ und damit für beliebiges $\lambda_l \in \mathbb{R}$ die eindimensionalen Eigenräume $\operatorname{Eig}(S_l, \lambda_l) = \langle (\lambda^{n-1})_{n \in \mathbb{N}} \rangle$. Für den Rechtsshift folgt $0 = \lambda_r x_1$ und damit $\lambda_r = 0$ oder $x_1 = 0$, in beiden Fällen ergibt sich sukzessive $x_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und damit, dass die Eigenräume $\operatorname{Eig}(S_r, \lambda_r)$ für beliebige λ_r trivial sind. (1 Punkt)

Bleibt die Summe $S_l + S_r$ zu untersuchen. Hier müssten Eigenpaare (λ, x)

$$(x_2, x_1 + x_3, \dots) = (S_l + S_r)(x) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$$

also $\lambda x_1 = x_2$ und $\lambda x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ für $n > 1$ erfüllen. Die Rekursion lässt sich ebenfalls für beliebiges λ erfüllen, dabei ist immer x_1 frei wählbar. Der Wert von x_2 ergibt sich aus dem von x_1 und danach ergibt sich $x_{n+1} = \lambda x_n - x_{n-1}$ für $n \geqslant 2$. Die Eigenräume sind also eindimensional, man erhält eine Basis, indem man x_1 auf 1 setzt und dann die restliche Basisfolge rekursiv zu $(1, \lambda, \lambda^2 - 1, \lambda^3 - 2\lambda, \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1, \dots)$ bildet. (1.5 Punkte)

(c) Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent mit Ordnung $n \in \mathbb{N}$, also so dass $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl ist, so dass $f^n = f \circ \dots \circ f = 0$ gilt. Für jedes Eigenpaar (λ, v) von f gilt $f^k(v) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(\lambda v) = \lambda f^{k-1}(v) = \dots = \lambda^k v$, also $\lambda^n v = 0$, damit kann nur Null ein Eigenwert sein. (1 Punkt)

Dass Null ein Eigenwert ist, ist im Fall $n = 1$ trivial. Anderenfalls ($n \geqslant 2$) folgt aus $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$, dass f nur die 0 auf 0 abbildet, und damit muss f^{n-1} schon die Nullfunktion sein, im Widerspruch dazu, dass n als kleinstmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft gewählt wurde, also ist $\operatorname{Kern}(f) \neq \{0\}$ und damit mindestens eindimensional, und damit ist 0 ein Eigenwert von f. (1 Punkt)

(d) Im vorliegenden Fall mit dem Eigenpaar $(-1, v)$ von $f^2 + f$ ist

$$f^3(v) = f^3(v) + f^2(v) - f^2(v) = f(f^2(v) + f(v)) - f^2(v) = f(-v) - f^2(v) = -(f^2(v) + f(v)) = v.$$

(1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.