R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 5

Ausgabedatum: 13. Mai 2024
Abgabedatum: 20. Mai 2024

Hausaufgabe II-5.1 (Determinante einer Dreiecksmatrix) 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 23.10, also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K^{n\times n}_{◹}$ oder $A \in K^{n\times n}_{◺}$, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(b) Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ bzw. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11})\,\det(A_{22}).$$

Beachte: Es dürfen nur Resultate und Techniken *vor* Lemma 23.10 genutzt werden. Unterscheiden Sie in Aussage (b) den Fall von (ir-)regulären Matrizen und nutzen Sie die Eindeutigkeit der Determinantenformen.

Hausaufgabe II-5.2 (Beispiele zu Det. und Cramersche Regel) 4 + 2 + 1 + 2.5 + 2 + 1.5 = 13 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{6\times 6}$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ u & v & w & i & j \\ x & y & z & k & l \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

(b) Die Zahlen 136, 561 und 986 haben 17 als gemeinsamen Teiler. Zeigen Sie, dass 17 auch

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

teilt (ohne die Determinante einfach auszurechnen).

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$ der Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 123 & 145 & 167 \\ 267 & 245 & 223 \end{pmatrix} = 0.$$

(d) Zeigen Sie per Induktion, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und bezüglich $\mathbb{R}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i)$$

ist und erklären Sie, wann die Matrix invertierbar ist. **Hinweis:** Transformieren Sie durch Spaltenumformungen die erste Zeile bis auf den ersten Eintrag zu einer Nullzeile.

(e) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine ganzzahlige Matrix. Zeigen Sie, dass A^{-1} genau dann ganzzahlig ist, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(f) Verwenden Sie die Cramersche Regel um die zweite Komponente x_2 der Lösung des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe II-5.3 (Total unimodulare Matrizen) 1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt **total unimodular**, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert in $\{-1, 0, 1\}$ hat.

(a) Geben Sie an, welche Werte die Einträge total unimodularer Matrizen haben können.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untermatrix beliebiger Dimension einer total unimodularen Matrix ebenfalls total unimodular ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$ total unimodular, dann ist die Blockmatrix $[A, B] \in \mathbb{R}^{m\times(n_1+n_2)}$ total unimodular.

(d) Zeigen Sie, dass für eine total unimodulare Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ auch die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m\times n+m}$$

total unimodular ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.