Übung II - 5 (Lösung)

Ausgabedatum: 13. Mai 2024
Abgabedatum: 20. Mai 2024

Hausaufgabe II-5.1 (Determinante einer Dreiecksmatrix) 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 23.10, also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K^{n \times n}_{\text{◹}}$ oder $A \in K^{n \times n}_{\text{◺}}$, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(b) Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ bzw. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11}) \, \det(A_{22}).$$

Beachte: Es dürfen nur Resultate und Techniken *vor* Lemma 23.10 genutzt werden. Unterscheiden Sie in Aussage (b) den Fall von (ir-)regulären Matrizen und nutzen Sie die Eindeutigkeit der Determinantenformen.

Lösung.

(a) Wir zeigen den Fall $A \in K^{n \times n}_{\text{◹}}$, der Fall der unteren Dreiecksmatrix geht dann entsprechend analog bzw. folgt daraus, dass $\det(A) = \det(A^\intercal)$. Per Definition ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}. \tag{23.3}$$

Falls es für ein $\sigma \in S_n$ einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\sigma(i) > i$ und damit $a_{\sigma(i),i} = 0$, ist diese Permutation nicht mehr an der Summenbildung beteiligt, da das Produkt der Matrixeinträge Null ist. Für jede Permutation, die an der Summe beteiligt ist, ist also $\sigma(i) \leqslant i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Für $i = 1$ folgt also $\sigma(1) = 1$ und so folgt schrittweise $\sigma(i) = i$ für alle i. Die Summe in (23.3) besteht also aus einem einzigen Summanden, nämlich dem zur Identitätspermutation id_n mit $\sigma(i) = i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Deren Signum ist gerade 1 (0 ist eine gerade Anzahl von Vertauschungen), also gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = (\operatorname{sgn} \mathrm{id}_n)\, a_{11} \cdots a_{nn} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(2 Punkte)

(b) Wir zeigen wieder den Fall der oberen Blockdreiecksmatrix, der Fall der unteren Blockdreiecksmatrix folgt entsprechend analog. Dafür seien nun erstmal $A_{11} \in K^{n_1 \times n_1}$ und $A_{22} \in K^{n_2 \times n_2}$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 + n_2 = n$.

Wir stellen fest, dass A genau dann regulär ist, wenn A_{11} und A_{22} regulär sind. Dass Regularität von A auch Regularität der Teilmatrizen impliziert sieht man direkt daran, dass die Zeilen und Spalten von A ja dann linear unabhängig sind, also auch die Zeilen/Spalten der Teilmatrizen. Die Rückrichtung ist auf Grund des Nullblocks links unten in der Matrix ebenfalls klar. Der Fall, dass $\det(A) = 0 = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22})$, ist also abgedeckt. (1 Punkt)

Sind A und beide Teilmatrizen A_{11}, A_{22} regulär, dann definieren wir die Abbildung

$$\tilde{\Delta}\colon K^{n_1 \times n_1} \to K \quad \text{mit} \quad \tilde{\Delta}(\underbrace{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n}_{\tilde{A}}) \coloneqq \det \begin{pmatrix} \tilde{A} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Diese ist nun eine Determinantenform auf $K^{n_1 \times n_1}$, entsprechend gilt

$$\tilde{\Delta}(A_{11}) = \det(A_{11}) \tilde{\Delta}(I_{n_1}) = \det(A_{11}) \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Wiederholen wir das Argument für die Matrix $\left[\begin{smallmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{smallmatrix}\right]$ im unteren rechten Block, dann folgt

$$\tilde{\Delta}(A_{11}) = \det(A_{11}) \tilde{\Delta}(I_{n_1}) = \det(A_{11}) \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \underbrace{\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}}_{=1},$$

wobei das letzte Argument Aussage (a) verwendet. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-5.2 (Beispiele zu Det. und Cramersche Regel) 4 + 2 + 1 + 2.5 + 2 + 1.5 = 13 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{6\times 6}$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ u & v & w & i & j \\ x & y & z & k & l \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

(b) Die Zahlen 136, 561 und 986 haben 17 als gemeinsamen Teiler. Zeigen Sie, dass 17 auch

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

teilt (ohne die Determinante einfach auszurechnen).

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$ der Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 123 & 145 & 167 \\ 267 & 245 & 223 \end{pmatrix} = 0.$$

(d) Zeigen Sie per Induktion, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und bezüglich $\mathbb{R}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i)$$

ist und erklären Sie, wann die Matrix invertierbar ist. **Hinweis:** Transformieren Sie durch Spaltenumformungen die erste Zeile bis auf den ersten Eintrag zu einer Nullzeile.

(e) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine ganzzahlige Matrix. Zeigen Sie, dass A^{-1} genau dann ganzzahlig ist, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(f) Verwenden Sie die Cramersche Regel um die zweite Komponente x_2 der Lösung des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

(a) (i) Die Matrix ist vollbesetzt und mit 4×4 schon recht groß, hier helfen also die Leibniz-Darstellung und Merkregeln nicht mehr. Entweder zieht man die Laplace-Entwicklung sauber durch (weil die dann entstehenden Submatrizen noch die Sarrus-Regel zulassen) oder man bringt die Matrix in ZSF und nutzt die einfache Determinantenstruktur von Dreiecksmatrizen. Bei diesem Ansatz kann man auch aufhören zu rechnen, wenn man einfache Struktur erreicht hat, also wenn man eine Null auf der Diagonalen (und unter diesem Eintrag) erhält, wenn man Blockdreiecksstruktur erreicht hat, etc. Dieser Ansatz ist also vorzuziehen und allgemein anwendbar, auch bei noch größeren Matrizendimensionen.

Die Zeilenstufenformtransformationen liefern die Zwischenresultate

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

An dieser Stelle brechen wir ab und berechnen die Determinante aus dem Blockdiagonalresultat von Hausaufgabe II-5.1 bzw. Lemma 23.10 als $1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = 1$. **Beachte:** Hätten wir Zeilen oder Spalten vertauscht, dann müssten wir evtl. das Vorzeichen der Determinante anpassen. (1 Punkt)

(ii) Wie im letzten Fall arbeiten wir uns Richtung Zeilenstufenform vor. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

und an dieser Stelle können wir abbrechen, weil wir auf der Diagonalen einen Nulleintrag erreicht haben, unter dem nur weitere Nullen stehen, die Determinante ist also Null, wie man (in diesem Fall) auch leicht daran sieht, dass die letzten beiden Zeilen linear abhhängig sind. (1 Punkt)

(iii) Mit dem (Block-)dreiecksresultat aus Hausaufgabe II-5.1 bzw. Lemma 23.10 kann man direkt ablesen, dass die Determinante a^3c^3 sein muss. (1 Punkt)

(iv) Die Determinante muss Null sein, denn die ersten drei Spalten bzw. die ersten 3 Zeilen liegen im von e_4 und e_5 aufgespannten (zweidimensionalen) Unterraum und sind damit linear abhängig. (1 Punkt)

(b) Wie wir wissen, dürfen wir Vielfache von Spalten auf andere Spalten addieren, ohne die Determinante zu verändern, wir können also das 10-fache der zweiten und das 100-fache der ersten Spalte auf die letzte addieren und erhalten mit den ganzen Zahlen $n_1 := \frac{136}{17}$, $n_2 := \frac{561}{17}$ und $n_3 := \frac{986}{17}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 36 \\ 5 & 6 & 61 \\ 9 & 8 & 86 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 136 \\ 5 & 6 & 561 \\ 9 & 8 & 986 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 17\cdot n_1 \\ 5 & 6 & 17\cdot n_2 \\ 9 & 8 & 17\cdot n_3 \end{pmatrix} = 17\ \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & n_1 \\ 5 & 6 & n_2 \\ 9 & 8 & n_3 \end{pmatrix},$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Multilinearität der Determinante verwendet haben. Nun muss man nur noch an der Definition der Determinanten ablesen, dass ganzzahlige Matrizen auch ganzzahlige Determinanten haben und ist fertig. (2 Punkte)

(c) Wir wissen, dass die Determinante genau dann den Wert Null annimmt, wenn die Zeilen (und damit die Spalten) linear abhängig sind. Die Gleichung wird also genau den (x_1, x_2, x_3) in $\langle (123, 145, 167), (267, 245, 223) \rangle$ gelöst. (1 Punkt)

(d) Für $n = 0$ ist die Aussage klar, denn hier hat die Matrix nur einen Eintrag (den Eintrag 1), der auch ihre Determinante ist. Das Produkt ist leer, also 1. (0.5 Punkte)

Für den Induktionsschritt $n \longrightarrow n + 1$ betrachten wir nun die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} & \cdots & x_{n+2}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Ohne die Determinante der Matrix zu verändern können wir Vielfache von Zeilen und Spalten von anderen abziehen. Wir ziehen das x_1-fache

(i) der vorletzten Spalte von der letzten Spalte

(ii) der drittletzten Spalte von der vorletzten Spalte

(iii) ...

(iv) der ersten Spalte von der zweiten Spalte

ab, das ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n+1} - x_2^n x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} - x_1 & \cdots & x_{n+2}^{n+1} - x_{n+2}^n x_1 \end{pmatrix},$$

aus deren Zeilen wir jeweils die für den Induktionsschritt nötigen Vorfaktoren rausziehen können, wenn wir nach der ersten Zeile entwickeln. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} & \cdots & x_{n+2}^{n+1} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n+1} - x_2^n x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+2} - x_1 & \cdots & x_{n+2}^{n+1} - x_{n+2}^n x_1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n+1} - x_2^n x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+2} - x_1 & \cdots & x_{n+2}^{n+1} - x_{n+2}^n x_1 \end{pmatrix} \\ &= (x_2 - x_1) \dots (x_{n+2} - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_{n+2}^n \end{pmatrix} \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n+2} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

(2 Punkte)

(e) Da A ganzzahlig ist, ist auch $\det(A)$ ganzzahlig. Auf Grund von Lemma 23.15 wissen wir, dass die Einträge der Inversen gerade dem Produkt aus der Determinanten und den Kofaktoren bestehen, also

$$\det(A) A^{-1}_{i,j} = \widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} [A]_{ij}.$$

Hier sieht man direkt, dass $\det(A) \in \{-1, 1\}$ die Ganzzahligkeit der Inversen impliziert. (1 Punkt)

Nun sei A^{-1} ganzzahlig. Dann ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ganzzahlig, und damit $\det(A)$ ganzzahlig mit ganzzahligem Inversen, also $\det(A) \in \{-1, 1\}$. (1 Punkt)

(f) Es ist

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{10}{2} = 5$$

wobei die Determinanten leicht durch Entwicklung nach der letzten Spalte berechnet werden können. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe II-5.3 (Total unimodulare Matrizen) 1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt **total unimodular**, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert in $\{-1, 0, 1\}$ hat.

(a) Geben Sie an, welche Werte die Einträge total unimodularer Matrizen haben können.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untermatrix beliebiger Dimension einer total unimodularen Matrix ebenfalls total unimodular ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$ total unimodular, dann ist die Blockmatrix $[A, B] \in \mathbb{R}^{m\times(n_1+n_2)}$ total unimodular.

(d) Zeigen Sie, dass für eine total unimodulare Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ auch die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m\times n+m}$$

total unimodular ist.

Lösung.

(a) Da jeder Eintrag selbst eine quadratische 1×1-Untermatrix ist, können die Einträge nur in $\{-1, 0, 1\}$ liegen. (1 Punkt)

(b) Da jede quadratische Untermatrix einer beliebigen Untermatrix der ursprünglichen Matrix wieder eine quadratische Untermatrix der ursprünglichen Matrix ist, muss für diese die definierende Determinanteneigenschaft gelten. (1 Punkt)

(c) Die Aussage ist falsch, die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sind total unimodular, aber

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hat die quadratische Untermatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Determinante 2. (1 Punkt)

(d) Es sei $\tilde{A}$ eine quadratische Untermatrix von

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m},$$

dann hat $\tilde{A}$ ebenfalls Blockstruktur der Form

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
a_{kl} & \cdots & a_{kn} & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & u_1 & \cdots & u_p \\
a_{ml} & \cdots & a_{mn} & \vdots & & \vdots \\
\cdots & v_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cdots & v_o & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix},$$

für $n, p \in [\![0, m+1]\!]$ und $l, o \in [\![0, n+1]\!]$ (in den Extremfällen verschwindet mindestens ein Block und wir haben es mit einer Untermatrix von weniger Blöcken zu tun). Dabei sind die u_i und v_i Spalten- bzw. Zeilenvektoren, die entweder Nullvektoren oder Vektoren mit genau einem Einseintrag sind. Gibt es eine Nullzeile oder -spalte, dann ist die Determinante Null, anderenfalls entwickelt man nach den Einseinträgen der u_i und v_i um bei der Determinante einer echten Untermatrix von A zu landen, die wieder in $\{-1, 0, 1\}$ liegt. (2 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.