Übung II - 4

Ausgabedatum: 6. Mai 2024
Abgabedatum: 13. Mai 2024

Hausaufgabe II-4.1 (Komponentenweise lineare Abhängigkeit bei Tensoren) 6 + 1 = 7 Punkte

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und V_i für $i = 1, \ldots, n$ K-Vektorräume und $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Weiter seien $v_i, \bar{v}_i \in V_i \setminus \{0\}$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es ist $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_n$ in $\bigotimes_{i=1}^n V_i$.

(ii) Es existieren $\lambda_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$v_i = \lambda_i \, \bar{v}_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

(b) Es sei V ein K-Vektorraum und $v, \bar{v} \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass genau dann $v \otimes \bar{v} = \bar{v} \otimes v$ ist, wenn $\{v, \bar{v}\}$ linear abhängig ist.

Hausaufgabe II-4.2 (No-cloning theorem) 5 Punkte

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \geqslant 2$ und $e \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(V \otimes V, V \otimes V)$ gibt, so dass

$$f(v \otimes e) = v \otimes v \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Hinweis: Was müsste sonst gelten, wenn v die Summe zweier verschiedener Basiselemente von V ist?

Hausaufgabe II-4.3 ((Schief-)Symmetrische Tensoren und Ihre Komponenten) 5 Punkte

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V und $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ die duale Basis von V^*. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 22.31, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a1) $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist symmetrisch.

(a2) Die Komponenten erfüllen $T^{i_1,\ldots,i_r} = T^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

sowie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(b1) $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist schiefsymmetrisch.

(b2) Die Komponenten erfüllen $T^{i_1,\ldots,i_r} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, T^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Hausaufgabe II-4.4 (Projektionen auf (schief-)symmetrische Tensoren) 3 + 2 = 5 Punkte

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Satz 22.34, also die folgenden Aussagen:

(a) Der Endomorphismus

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \operatorname{proj}_{\text{sym}}(T) \coloneqq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

ist eine Projektion auf den Unterraum der symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

(b) Der Endomorphismus

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \operatorname{proj}_{\text{skew}}(T) \coloneqq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

ist eine Projektion auf den Unterraum der schiefsymmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.