R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 4 (Lösung)

Ausgabedatum: 6. Mai 2024
Abgabedatum: 13. Mai 2024

Hausaufgabe II-4.1 (Komponentenweise lineare Abhängigkeit bei Tensoren) 6 + 1 = 7 Punkte

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und V_i für $i = 1, \ldots, n$ K-Vektorräume und $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Weiter seien $v_i, \bar{v}_i \in V_i \setminus \{0\}$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (i) Es ist $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_n$ in $\bigotimes_{i=1}^n V_i$.

  (ii) Es existieren $\lambda_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$v_i = \lambda_i \, \bar{v}_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

(b) Es sei V ein K-Vektorraum und $v, \bar{v} \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass genau dann $v \otimes \bar{v} = \bar{v} \otimes v$ ist, wenn $\{v, \bar{v}\}$ linear abhängig ist.

Lösung.

(a) Wir starten mit der einfacheren Richtung, nämlich der Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$: Hier ist auf Grund der Multilinearität des Tensorprodukts

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = \lambda_1 \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \bar{v}_n = \underbrace{\prod_{i=1}^n \lambda_i}_{=1} (\bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_n) = \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_n.$$

(1 Punkt)

Verbleibt also die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$:

Der Fall $n = 1$ ist trivial, denn hier ist $\lambda = 1$, wir können also von $n \geqslant 2$ ausgehen.

Für jedes $i = 1, \dots, n$ sei nun eine Basis B_i von V_i gegeben. Dann gibt es eindeutige, endliche Darstellungen der v_i und $\bar{v}_i$ bezüglich ihrer jeweiligen Basen, also $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} b_{i,j} \quad \text{und} \quad \bar{v}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \bar{\alpha}_{i,j} b_{i,j}, \text{ wobei } b_{i,j} \in B_i \ \forall j = 1, \dots, n_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Hier haben wir o. B. d. A. angenommen, dass für jedes i die Darstellungen von v_i und $\bar{v}_i$ bezüglich der gleichen Basisvektoren möglich sind (ansonsten vereinigen wir die Mengen der beteiligten Basisvektoren und füllen mit Nullkoeffizienten die Darstellungen auf).

Auf Grund von Hausaufgabe II-1.1 wissen wir, dass $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = \bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_n$ genau dann gilt, wenn

$$f(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(\bar{v}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{v}_n) \quad \text{für alle} \quad f \in \operatorname{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i; K\right) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right)^* .$$

was wegen der universellen Eigenschaft der multilinearen Tensorproduktabbildung $\otimes$ äquivalent zu

$$b(v_1, v_2, \dots, v_n) = b(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \quad \text{für alle} \quad b \in \operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_n; K)$$

ist. Multilineare Abbildungen sind auf dem Produkt von Basen eindeutig definiert (Satz 22.20), wir können also diejenigen multilinearen Abbildungen untersuchen, welche für genau ein n-Tupel $(b_1, \dots, b_n) \in \bigtimes_{i=1}^n B_i$ den Wert 1 ausgeben und für alle weiteren Elemente des Basisprodukt den Wert Null. Deren Werte auf $\bigtimes_{i=1}^n V_i$ entsprechen gerade dem n-Faktoren-Produkt der Koeffizienten zu den b_i in deren Beteiligung an der Darstellung des Arguments. Entsprechend gilt für jede Indexkombination $(j_1, \dots, j_n) \in \bigtimes_{i=1}^n \{1, \dots, n_i\}$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,j_i} = \prod_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_{i,j_i}.$$

(2 Punkte)

Wir wählen nun ein $k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig und ziehen seinen Anteil aus dem Produkt raus, dann ergibt sich wieder für beliebige $(j_1, \dots, j_n) \in \bigtimes_{i=1}^n \{1, \dots, n_i\}$ die äquivalente Gleichheit

$$\alpha_{k,j_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_{i,j_i} = \bar{\alpha}_{k,j_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \bar{\alpha}_{i,j_i}.$$

Nun ist wichtig zu erkennen, dass es für jedes der Restprodukte eine Indexkombination gibt, so dass das entsprechende Restprodukt einen Wert ungleich Null annimmt, denn ansonsten wäre einer der Vektoren $v_i, \bar{v}_i$, $i \neq k$ der Nullvektor. Daraus schließen wir, dass α_{k,j_k} und $\bar{\alpha}_{k,j_k}$ immer entweder beide Null sind oder beide ungleich Null sind. Wir können also o. B. d. A. annehmen, dass wir garkeine Nullkoeffizienten in unseren Darstellungen bezüglich der Basisvektoren hatten, denn ansonsten könnten wir diese Indizes einfach aus beiden Darstellungen (von v_k und $\bar{v}_k$) einfach entfernen. (1 Punkt)

Wir dürfen also

$$\frac{\alpha_{k,j_k}}{\bar{\alpha}_{k,j_k}} = \frac{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \bar{\alpha}_{i,j_i}}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \alpha_{i,j_i}}$$

für beliebige $(j_1, \ldots, j_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n}\{1, \ldots, n_i\}$ folgern.

Nun können wir eine der Wahlen der Indizes j_i, $i \neq k$ festhalten aber alle Wahlen $j_k \in \{1, \ldots, n_k\}$ zum Index k durchlaufen lassen. Das Produkt auf der rechten Seite bleibt dann konstant, der Term auf der linken Seite muss also ebenfalls konstant sein, das ergibt uns für beliebiges j_k genau die gesuchten Faktoren

$$\lambda_k := \frac{\alpha_{k,j_k}}{\bar{\alpha}_{k,j_k}}$$

für beliebiges k. (1 Punkt)

Dass deren Produkt den Wert 1 haben muss sehen wir aus der gleichen Zeile, denn es ergibt sich, wenn man die rechte Seite in die λ_i übersetzt, der Ausdruck

$$\lambda_k = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}} \lambda_i}.$$

(1 Punkt)

(b) Sind v oder $\bar{v}$ der Nullvektor ist die Aussage trivial, denn dann sind beide Tensoren Null und die Menge offensichtlich linear abhängig.

Vorausgesetzt $\{v, \bar{v}\}$ ist linear abhängig aber beide Vektoren sind ungleich Null, dann gibt es ein Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $v = \lambda\bar{v}$ und damit

$$v \otimes \bar{v} = (\lambda\bar{v}) \otimes \bar{v} = \lambda(\bar{v} \otimes \bar{v}) = \bar{v} \otimes (\lambda\bar{v}) = \bar{v} \otimes v.$$

(0.5 Punkte)

Vorausgesetzt die Tensoren sind gleich und ungleich Null, dann gibt es nach dem ersten Aufgabenteil λ_1, λ_2 mit

$$v = \lambda_1\bar{v} \text{ und } \bar{v} = \lambda_2\bar{v},$$

womit die Menge linear abhängig ist. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe II-4.2 (No-cloning theorem) 5 Punkte

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \geqslant 2$ und $e \in V$. Weiterhin sei $V \otimes V$ mit $\otimes$ ein Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(V \otimes V, V \otimes V)$ gibt, so dass

$$f(v \otimes e) = v \otimes v \quad \text{für alle } v \in V.$$

Hinweis: Was müsste sonst gelten, wenn v die Summe zweier verschiedener Basiselemente von V ist?

Lösung.

Nach Voraussetzung ist $\dim(V) \geqslant 2$. In einer Basis B von V existieren also zwei verschiedene, nicht-Null Vektoren $v_1, v_2 \in B$ und wir können $v := v_1 + v_2 \in V$ setzen. (1 Punkt)

Für ein f mit der gegebenen Eigenschaft wäre dann (erst bilinear austensorieren, dann linear abbilden):

$$f(v \otimes e) = f(v_1 + v_2 \otimes e) = f(v_1 \otimes e + v_2 \otimes e) = f(v_1 \otimes e) + f(v_2 \otimes e) = v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2$$

und zugleich (erst linear abbilden, dann bilinear austensorieren)

$$f(v \otimes e) = v \otimes v = (v_1 + v_2) \otimes (v_1 + v_2) = v_1 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2,$$

also können wir folgern, dass

$$v_1 \otimes v_2 = -v_2 \otimes v_1. \tag{0.1}$$

(2 Punkte)

Sowohl v_1 als auch v_2 sind nicht der Nullvektor, aus Hausaufgabe II-4.1 wissen wir also, dass das nur der Fall sein kann, wenn λ_1, λ_2 existieren, so dass

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad \text{und} \quad v_1 = -\lambda_1 v_2,\ v_2 = \lambda_2 v_1,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von (v_1, v_2) als Teilfamilie der Basis B. (2 Punkte)

Statt mit Hausaufgabe II-4.1 könnte man hier auch mit der Isomorphie aller Tensorprodukträume argumentieren. Der Tensorproduktraum $V \tilde{\otimes} V$ mit $\tilde{\otimes}$, den wir aus V mit der Basis B konstruieren können ist isomorph zu $V \otimes V$ über ein $\tilde{f} \in \operatorname{Iso}(V \tilde{\otimes} V; V \otimes V)$, so dass $\otimes = \tilde{f} \circ \tilde{\otimes}$. Mit dieser Abbildung können wir aus Gleichung (0.1) folgern, dass

$$0 = \tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{f}^{-1}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(v_1 \tilde{\otimes} v_2 + v_2 \tilde{\otimes} v_1)) = v_1 \tilde{\otimes} v_2 + v_2 \tilde{\otimes} v_1,$$

im Widerspruch dazu, dass $(v_1 \tilde{\otimes} v_2, v_2 \tilde{\otimes} v_1)$ als Teilfamilie der Basis von $V \tilde{\otimes} V$ linear unabhängig sein muss.

Hausaufgabe II-4.3 ((Schief-)Symmetrische Tensoren und Ihre Komponenten) 5 Punkte

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ die duale Basis von V^*. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 22.30, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a1) $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist symmetrisch.

(a2) Die Komponenten erfüllen $T^{i_1,\dots,i_r} = T^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leqslant i_1, \dots, i_r \leqslant n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

sowie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(b1) $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist schiefsymmetrisch.

(b2) Die Komponenten erfüllen $T^{i_1,\dots,i_r} = (\operatorname{sgn}\sigma)\, T^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leqslant i_1, \dots, i_r \leqslant n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Lösung.

Ein allgemeiner (r, s)-Tensor hat in der entsprechenden Basis die Darstellung

$$T = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n} T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}. \tag{22.16}$$

In dem vorliegenden Fall ist also $(s = 0)$:

$$T = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} T^{i_1,\dots,i_r}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}. \tag{22.16}$$

Für beliebige Kombinationen von dualen Basisvektoren $\varepsilon^{j_k} \in B^* = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ ergibt die Auswertung des Tensors also

$$T(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_r}) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} T^{i_1,\dots,i_r}\, \underbrace{\langle \varepsilon^{j_1}, e_{i_1} \rangle}_{\delta_{j_1 i_1}} \cdots \underbrace{\langle \varepsilon^{j_r}, e_{i_r} \rangle}_{\delta_{j_r i_r}} = T^{j_1,\dots,j_r},$$

also gerade die Komponenten des Tensors. Damit lassen sich beide Äquivalenzen gleichzeitig zeigen. (2 Punkte)

(a1) $\Rightarrow$ (a2) und (b1) $\Rightarrow$ (b2): Da $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ (schief-)symmetrisch ist, gilt per Definition, dass für beliebige $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$, dass

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r) = T(\omega^{\sigma(1)}, \dots, \omega^{\sigma(r)}), \tag{22.18}$$

beziehungsweise, die gleiche Aussage mit dem Signum der Permutation. Das gilt also insbesondere für das Einsetzen von Tupeln der dualen Basisvektoren $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$, also wenn $\omega^k \in B^* = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ ist

$$T^{j_1,\dots,j_r} = T(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_r}) = T(\varepsilon^{j_{\sigma(1)}}, \dots, \varepsilon^{j_{\sigma(r)}}) = T^{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(r)}},$$

beziehungsweise, die gleiche Aussage mit dem Signum der Permutation. (1.5 Punkte)

(a2) $\Rightarrow$ (a1) und (b2) $\Rightarrow$ (b1): Sind Dualraumelemente $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ mit Darstellungen $\omega^k = \sum_{i=1}^n \omega_{k,i}\varepsilon^i$ und eine Permutation $\sigma \in S_r$ gegeben, dann ist auf Grund der Multilinearität des Tensors als Abbildung (wir sortieren lediglich die Summationsreihenfolge um und Verwenden dann die Symmetrie der Tensorkomponenten)

$$\begin{aligned}
T(\omega^1, \dots, \omega^r) &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n T(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r})\omega_{1,i_1} \dots \omega_{r,i_r} && \text{(Multilinearität)} \\
&= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n T^{i_1,\dots,i_r}\omega_{1,i_1} \dots \omega_{r,i_r} && \text{(Komponentendarst.)} \\
&= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n T^{i_1,\dots,i_r}\omega_{\sigma(1),i_{\sigma(1)}} \dots \omega_{\sigma(r),i_{\sigma(r)}} && \text{(Produkte umsortiert)} \\
&= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n T^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}}\omega_{\sigma(1),i_{\sigma(1)}} \dots \omega_{\sigma(r),i_{\sigma(r)}} && \text{(Symmetrie)} \\
&= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n T^{i_1,\dots,i_r}\omega_{\sigma(1),i_1} \dots \omega_{\sigma(r),i_r} && \text{(Summanden umsortiert)} \\
&= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n T(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r})\omega_{\sigma(1),i_1} \dots \omega_{\sigma(r),i_r} && \text{(Komponentendarst.)} \\
&= T(\omega^{\sigma(1)}, \dots, \omega^{\sigma(r)}) && \text{(Multilinearität)}
\end{aligned}$$

bzw. die entsprechende Aussage mit dem Signum der Abbildung. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe II-4.4 (Projektionen auf (schief-)symmetrische Tensoren) 3 + 2 = 5 Punkte

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Satz 22.33, also die folgenden Aussagen:

(a) Der Endomorphismus

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \operatorname{proj}_{\text{sym}}(T) := \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

ist eine Projektion auf den Unterraum der symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

(b) Der Endomorphismus

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \operatorname{proj}_{\text{skew}}(T) \coloneqq \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

ist eine Projektion auf den Unterraum der schiefsymmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Lösung.

(a) Zur Wohldefiniertheit der Abbildung: Erst einmal ist der Term auf der rechten Seite tatsächlich wohldefiniert, denn es gibt nur eine endliche Anzahl von Permutationen in S_r. (0.5 Punkte)

Die Permutation als lineare Abbildung ist in Gleichung (22.22) definiert, damit lässt sich nun zeigen, dass tatsächlich $\operatorname{proj}_{\text{sym}}(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$ ist. Die wichtige Beobachtung hier ist, dass die Summe über die alle Permutationen dafür sorgt, dass ein beliebiges $\hat{\sigma} \in S_r$, das die Argumente permutiert, in der Summe verschwindet, denn $\hat{\sigma}^{-1}(S_r) = S_r$. Für alle $1 \leqslant j_1, \ldots, j_r \leqslant n$ ist daher:

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\text{sym}}(T)^{j_{\hat{\sigma}(1)},\ldots,j_{\hat{\sigma}(r)}} &= \operatorname{proj}_{\text{sym}}(T)(\varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(1)}}, \ldots, \varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(r)}}) \\
&= \left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \right) (\varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(1)}}, \ldots, \varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(r)}}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T)(\varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(1)}}, \ldots, \varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(r)}}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} T^{i_1,\ldots,i_r} \underbrace{\langle \varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(1)}}, e_{i_{\sigma(1)}} \rangle}_{\delta_{j_{\hat{\sigma}(1)} i_{\sigma(1)}}} \cdots \underbrace{\langle \varepsilon^{j_{\hat{\sigma}(r)}}, e_{i_{\sigma(r)}} \rangle}_{\delta_{j_{\hat{\sigma}(r)} i_{\sigma(r)}}} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} T^{i_1,\ldots,i_r} \underbrace{\langle \varepsilon^{j_1}, e_{i_{\hat{\sigma}^{-1}\circ\sigma(1)}} \rangle}_{\delta_{j_1 i_{\hat{\sigma}^{-1}\circ\sigma(1)}}} \cdots \underbrace{\langle \varepsilon^{j_r}, e_{i_{\hat{\sigma}^{-1}\circ\sigma(r)}} \rangle}_{\delta_{j_r i_{\hat{\sigma}^{-1}\circ\sigma(r)}}} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} T^{i_1,\ldots,i_r} \underbrace{\langle \varepsilon^{j_1}, e_{i_{\sigma(1)}} \rangle}_{\delta_{j_1 i_{\sigma(1)}}} \cdots \underbrace{\langle \varepsilon^{j_r}, e_{i_{\sigma(r)}} \rangle}_{\delta_{j_r i_{\sigma(r)}}} \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T)(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_r}) \\
&= \operatorname{proj}_{\text{sym}}(T)^{j_1,\ldots,j_r},
\end{aligned}$$

und damit ist das Bild tatsächlich wohldefiniert. (1.5 Punkte)

Die Strukturerhaltung des Endomorphismus ist offensichtlich, da die Abbildung über die skalierte Summe von Endomorphismen dargestellt wurde, es bleibt die Projektionseigenschaft zu zeigen. Diese folgt, da

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\mathrm{sym}}(\operatorname{proj}_{\mathrm{sym}}(T)) &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\sigma\left(\frac{1}{r!}\sum_{\hat\sigma\in S_r}\hat\sigma(T)\right)\\
&= \frac{1}{r!}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\sum_{\hat\sigma\in S_r}\sigma\circ\hat\sigma(T)\\
&= \frac{1}{r!}\frac{1}{r!}r!\sum_{\sigma\in S_r}\sigma(T)\\
&= \operatorname{proj}_{\mathrm{sym}}(T).
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Der Nachweis dieser Aussage funktioniert ziemlich analog zu dem obigen Resultat, es muss lediglich zusätzlich verwendet werden, dass laut Satz 7.29

$$\operatorname{sgn}(\hat\sigma\circ\sigma) = \operatorname{sgn}(\hat\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn}(\hat\sigma)^2 = 1$$

und daher

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\mathrm{skew}}(T)^{j_{\hat\sigma(1)},\dots,j_{\hat\sigma(r)}} &= \operatorname{proj}_{\mathrm{skew}}(T)(\varepsilon^{j_{\hat\sigma(1)}},\dots,\varepsilon^{j_{\hat\sigma(r)}})\\
&= \left(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma(T)\right)(\varepsilon^{j_{\hat\sigma(1)}},\dots,\varepsilon^{j_{\hat\sigma(r)}})\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma(T)(\varepsilon^{j_{\hat\sigma(1)}},\dots,\varepsilon^{j_{\hat\sigma(r)}})\\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}T^{i_1,\dots,i_r}\underbrace{\langle\varepsilon^{j_{\hat\sigma(1)}},e_{i_{\sigma(1)}}\rangle}_{\delta_{j_{\hat\sigma(1)}i_{\sigma(1)}}}\cdots\underbrace{\langle\varepsilon^{j_{\hat\sigma(r)}},e_{i_{\sigma(r)}}\rangle}_{\delta_{j_{\hat\sigma(r)}i_{\sigma(r)}}}\\
&= \frac{1}{r!}\operatorname{sgn}\hat\sigma\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\hat\sigma\cdot\operatorname{sgn}\sigma)\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}T^{i_1,\dots,i_r}\underbrace{\langle\varepsilon^{j_1},e_{i_{\hat\sigma^{-1}\circ\sigma(1)}}\rangle}_{\delta_{j_1 i_{\hat\sigma^{-1}\circ\sigma(1)}}}\cdots\underbrace{\langle\varepsilon^{j_r},e_{i_{\hat\sigma^{-1}\circ\sigma(r)}}\rangle}_{\delta_{j_r i_{\hat\sigma^{-1}\circ\sigma(r)}}}\\
&= \frac{1}{r!}\operatorname{sgn}\hat\sigma\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}T^{i_1,\dots,i_r}\underbrace{\langle\varepsilon^{j_1},e_{i_{\sigma(1)}}\rangle}_{\delta_{j_1 i_{\sigma(1)}}}\cdots\underbrace{\langle\varepsilon^{j_r},e_{i_{\sigma(r)}}\rangle}_{\delta_{j_r i_{\sigma(r)}}}\\
&= \frac{1}{r!}\operatorname{sgn}\hat\sigma\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma(T)(\varepsilon^{j_1},\dots,\varepsilon^{j_r})\\
&= \operatorname{sgn}\hat\sigma\operatorname{proj}_{\mathrm{skew}}(T)^{j_1,\dots,j_r}.
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\text{skew}}\left(\operatorname{proj}_{\text{skew}}(T)\right) &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\left(\frac{1}{r!}\sum_{\hat{\sigma}\in S_r}\operatorname{sgn}(\hat{\sigma})\hat{\sigma}(T)\right)\\
&= \frac{1}{r!}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}\sum_{\hat{\sigma}\in S_r}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\hat{\sigma})\sigma\circ\hat{\sigma}(T)\\
&= \frac{1}{r!}\frac{1}{r!}r!\sum_{\sigma\in S_r}\sigma(T)\\
&= \operatorname{proj}_{\text{skew}}(T).
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.