R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 3

Ausgabedatum: 29. April 2024
Abgabedatum: 6. Mai 2024

Hausaufgabe II-3.1 (Existenz einer primalen Basis) 4 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Hausaufgabe II-3.2 (Primale und duale Isomorphie) 2 + 2 = 4 Punkte

Gegeben seien zwei K-Vektorräume U und V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $U \cong V$ impliziert $U^* \cong V^*$.

(b) Sind U und V endlichdimensional, dann impliziert $U^* \cong V^*$ auch $U \cong V$.

Hausaufgabe II-3.3 (Basics zu Multilinearformen und Tensoren) 2 + 3 + 4 + 2 = 11 Punkte

(a) Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie Lemma 22.3, also dass $\operatorname{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum von $W^{U \times V} = \{f \colon U \times V \to W\}$ ist.

(b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp, was Tensorprodukte und Tensoren sind, welche Aufgabe sie erfüllen und wie man Instanzen von ihnen konstruieren kann.

(c) Unten stehen K-Vektorräume U und V mit Basen $B_U = (u_i)_{i \in I}$ und $B_V = (v_j)_{j \in J}$ sowie Elemente $u \in U$ sowie $v \in V$ mit einem Indexpaaar (i, j). Stellen Sie jeweils den Tensor $u \otimes v$ bezüglich $(u_i \otimes v_j)_{i,j \in I \times J}$ im dazugehörigen Tesorproduktraum (siehe Gleichung (22.1)) dar und bestimmen Sie $u \otimes v(i, j)$.

(i) $K = \mathbb{R}$, $U = V = \mathbb{R}^3$, $B_U = B_V$ die kanonische Basis, $u = (1, 2, 3)^\intercal$, $v = (3, 2, 1)^\intercal$, $(i, j) = (3, 2)$

(*ii*) $K = \mathbb{Z}_2$, $U = (\{N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid N \text{ endlich}\}, \triangle, \cdot)$, $V = (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4), \triangle, \cdot)$, $B_U = (\llbracket 1, n \rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$, $B_V = (\{x\})_{x\in\mathbb{Z}_4}$, $u = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ Primzahl und } n < 9\}$, $v = \{0, 3\}$, $(i, j) = (3, 2)$

(d) Es seien U und V zweidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Basen (u_1, u_2) und (v_1, v_2). Zeigen Sie, dass der Tensor $3u_1 \otimes v_1 + 6u_2 \otimes v_1 + 2(u_1 + u_2) \otimes v_2$ nicht Rang eins haben kann.

Hausaufgabe II-3.4 (Isomorphie von Bilinearformen und Homom. auf dem Tensorprodukt) 3 Punkte

Es seien U, V und W Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Zeigen Sie Satz 22.14, also dass die Abbildung

$$\operatorname{Bil}(U \times V; W) \ni g \mapsto f \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$$

(definiert durch die Eigenschaft $g = f \circ \otimes$, siehe Satz 22.12) ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.