Übung II - 3 (Lösung)

Ausgabedatum: 29. April 2024
Abgabedatum: 6. Mai 2024

Hausaufgabe II-3.1 (Existenz einer primalen Basis) 4 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und B^* eine Basis des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B von V existiert, zu der B^* die duale Basis ist.

Lösung.

Wir bezeichnen die zu $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ duale Basis vom Bidualraum V^{**} mit $B^{**} = \{v_1^{**}, \dots, v_n^{**}\}$. Da die kanonische Injektion i_V im endlichdimensionalen Fall eine kanonische Bijektion ist, gilt das Gleiche für $i_V^{-1} \colon V^{**} \to V$. (1 Punkt)

Entsprechend ist $B \coloneqq i_V^{-1}(B^{**}) = \{i_V^{-1}(v_1^{**}), \dots, i_V^{-1}(v_n^{**})\} \subseteq V$ eine Basis von V, siehe Lemma 17.5. (1 Punkt)

Auf Grund der Eigenschaft, dass B^{**} dual zu B^* ist, und der Definition der kanonischen Bijektion, ist

$$v_i^*(i_V^{-1}(v_j^{**})) = v_j^{**}(v_i^*) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

damit ist B^* dual zu B. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-3.2 (Primale und duale Isomorphie) 2 + 2 = 4 Punkte

Gegeben seien zwei K-Vektorräume U und V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $U \cong V$ impliziert $U^* \cong V^*$.

(b) Sind U und V endlichdimensional, dann impliziert $U^* \cong V^*$ auch $U \cong V$.

Lösung.

(a) Ist $U \cong V$, dann existiert ein Isomorphismus $f\colon U \to V$. Dessen duale Abbildung $f^*\colon V^* \to U^*$ ist ebenfalls ein Isomorphismus, siehe Satz 21.32, und seine Umkehrabbildung zeigt direkt $U^* \cong V^*$. (2 Punkte)

(b) Wir nutzen (a), um zu folgern, dass aus $U^* \cong V^*$ auch $U^{**} \cong V^{**}$ folgt. Da im endlichdimensionalen Fall auf Grund der kanonischen Bijektion auch $U^{**} \cong U$ und $V^{**} \cong V$ gilt (siehe Satz 21.42), haben wir

$$U \cong U^{**} \cong V^{**} \cong V.$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe II-3.3 (Basics zu Multilinearformen und Tensoren) 2 + 3 + 4 + 2 = 11 Punkte

(a) Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K. Zeigen Sie Lemma 22.3, also dass $\operatorname{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum von $W^{U\times V} = \{f\colon U \times V \to W\}$ ist.

(b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten knapp, was Tensorprodukte und Tensoren sind, welche Aufgabe sie erfüllen und wie man Instanzen von ihnen konstruieren kann.

(c) Unten stehen K-Vektorräume U und V mit Basen $B_U = (u_i)_{i\in I}$ und $B_V = (v_j)_{j\in J}$ sowie Elemente $u \in U$ sowie $v \in V$ mit einem Indexpaaar (i, j). Stellen Sie jeweils den Tensor $u \otimes v$ bezüglich $(u_i \otimes v_j)_{i,j\in I\times J}$ im dazugehörigen Tesorproduktraum (siehe Gleichung (22.1)) dar und bestimmen Sie $u \otimes v(i, j)$.

(i) $K = \mathbb{R}$, $U = V = \mathbb{R}^3$, $B_U = B_V$ die kanonische Basis, $u = (1, 2, 3)^\intercal$, $v = (3, 2, 1)^\intercal$, $(i, j) = (3, 2)$

(ii) $K = \mathbb{Z}_2$, $U = (\{N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid N \text{ endlich}\}, \triangle, \cdot)$, $V = (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4), \triangle, \cdot)$, $B_U = ([\![1, n]\!])_{n\in\mathbb{N}}$, $B_V = (\{x\})_{x\in\mathbb{Z}_4}$, $u = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ Primzahl und } n < 9\}$, $v = \{0, 3\}$, $(i, j) = (3, 2)$

(d) Es seien U und V zweidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Basen (u_1, u_2) und (v_1, v_2). Zeigen Sie, dass der Tensor $3u_1 \otimes v_1 + 6u_2 \otimes v_1 + 2(u_1 + u_2) \otimes v_2$ nicht Rang eins haben kann.

Lösung.

(a) Wir verwenden das Unterraumkriterium. Nichtleerheit der Menge der Bilinearformen ist klar, denn die Nullfunktion ist bilinear, es gilt nämlich

$$0(u, \alpha v + \tilde{v}) = 0 = 0 + 0 = \alpha 0(u, v) + 0(u, \tilde{v})$$

und die analoge Formulierung im zweiten Eingang, jeweils für entsprechende Elemente $u \in U$ und $v, \tilde{v} \in V$. (1 Punkt)

Seien jetzt zwei Bilinearformen $f, g\colon U \times V \to W$ gegeben und $\alpha, \beta \in K$ sowie $u \in U$, $v\tilde{v} \in V$. Dann gilt wegen der punktweisen Verknüpfung im Vektorraum der Abbildungen:

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)(u, \beta v + \tilde{v}) &= \alpha f(u, \beta v + \tilde{v}) + g(u, \beta v + \tilde{v}) \\ &= \alpha\beta f(u, v) + \alpha f(u, \tilde{v}) + \beta g(u, v) + g(u, \tilde{v}) \\ &= \beta(\alpha f + g)(u, v) + (\alpha f + g)(u, \tilde{v}),\end{aligned}$$

sowie die analoge Formulierung im ersten Eingang der Abbildungen und damit ist die Menge bezüglich der Vektorraumverknüpfungen abgeschlossen. (1 Punkt)

(b) Das Tensorprodukt zweier K-Vektorräume U und V ist die Äquivalenzklasse (bezüglich der Vektorraumisomorphie) bestehend aus Vektorräumen $U \otimes V$ mit dazugehörigen Bilinearformen $\otimes\colon U \times V \to U \otimes V$, welche die sogenannte *universelle Eigenschaft* erfüllen, nämlich dass für beliebige K-Vektorräume W zu jeder Bilinearform $g \in \mathrm{Bil}(U \times V; W)$ eine eindeutige lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(U \otimes V; W)$ existiert, so dass $g = f \circ \otimes$. Tensorprodukte sind also gerade die Vektorräume, welche die (isomorphe) Transformation des Verhaltens von Bilinearformen auf Produkträumen in das Verhalten von Homomorphismen (auf diesen Tensorprodukten) ermöglichen. So lassen sich für lineare Abbildungen bekannte Resultate in den Kontext der multilinearen Algebra übertragen. Konstruieren kann man Instanzen von Tensorprodukträumen in Abhängigkeit von Basen in den Räumen U und V als Unterräume endlich getragener Abbildungen auf der Produktmenge der Basisindexmengen in den zugrunde liegenden Körper. (3 Punkte)

Was wir jetzt noch nicht wissen: Die Tensoren selbst (also die Elemente des Tensorproduktraums) als Multilinearformen aufzufassen liefert in der kommenden Inhaltswoche die Basis des vielseitig nutzbaren (r, s)-Tensorkalküls.

(c) (i) Die Abbildung $u \otimes v$ ist gerade über die Basisdarstellung von u und v definiert, wir benötigen also zuerst die Darstellung von u in U bezüglich B_U und die von v in V bezüglich B_V. Da wir in beiden Fällen den Standardvektorraum und die kanonische Basis vorliegen haben, ist die Darstellung sofort ablesbar, denn es sind

$$u = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad \text{und} \quad v = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3.$$

Entsprechend ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned}u \otimes v = (1e_1 + 2e_2 + 3e_3) \otimes (3e_1 + 2e_2 + 1e_3) = {} & 3\, e_1 \otimes e_1 + 2\, e_1 \otimes e_2 + 1\, e_1 \otimes e_3 + \\ & 6\, e_2 \otimes e_1 + 4\, e_2 \otimes e_2 + 2\, e_2 \otimes e_3 + \\ & 9\, e_3 \otimes e_1 + 6\, e_3 \otimes e_2 + 3\, e_3 \otimes e_3.\end{aligned}$$

Interpretiert man den Index zu B_U als Zeilenindex und den zu B_V als Spaltenindex und ordnet die Koeffizienten in einer ensprechenden Matrix an, dann ergibt sich gerade

$$uv^\top = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Auswertung an $(3, 2)$ ist nach Definition der Basistensoren gerade 6. (2 Punkte)

(ii) Wir können hier genauso vorgehen wie in der vorherigen Teilaufgabe, bestimmen also erstmal die Basisdarstellung von u und v. Diese findet man entweder über entsprechende lineare Gleichungssysteme in $\mathbb{Z}_2$ oder man liest auf Grund der einfachen Struktur direkt ab als

$$\begin{aligned} u &= \{2, 3, 5, 7\} = [\![1, 7]\!] \triangle [\![1, 6]\!] \triangle [\![1, 5]\!] \triangle [\![1, 4]\!] \triangle [\![1, 3]\!] \triangle [\![1, 1]\!] \\ v &= \{0, 3\} \qquad = \{0\} \triangle \{3\}. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} u \otimes v &= ([\![1, 7]\!] \triangle [\![1, 6]\!] \triangle [\![1, 5]\!] \triangle [\![1, 4]\!] \triangle [\![1, 3]\!] \triangle [\![1, 1]\!]) \otimes (\{0\} \triangle \{3\}) \\ &= [\![1, 7]\!] \otimes \{0\} + [\![1, 7]\!] \otimes \{3\} \\ &\quad + [\![1, 6]\!] \otimes \{0\} + [\![1, 6]\!] \otimes \{3\} \\ &\quad + [\![1, 5]\!] \otimes \{0\} + [\![1, 5]\!] \otimes \{3\} \\ &\quad + [\![1, 4]\!] \otimes \{0\} + [\![1, 4]\!] \otimes \{3\} \\ &\quad + [\![1, 3]\!] \otimes \{0\} + [\![1, 3]\!] \otimes \{3\} \\ &\quad + [\![1, 1]\!] \otimes \{0\} + [\![1, 1]\!] \otimes \{3\}. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung tritt der Tensor $[\![1, 3]\!] \times \{1\}$ (gehört zum Indexpaar $(3, 2)$) nicht auf, die Evaluation an $(3, 2)$ ergibt also 0. (2 Punkte)

(d) Ein Tensor mit Rang Eins muss die Struktur $u \otimes v$ für $(u, v) \in U \times V$ haben. Für $B_U = (u_1, u_2)$ und $B_V = (v_1, v_2)$ ist für beliebige Vektoren $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ und $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ mit Skalaren $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ aus K der Tensor

$$u \otimes v = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \otimes (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \alpha_1\beta_1 u_1 \otimes v_1 + \alpha_1\beta_2 u_1 \otimes v_2 + \alpha_2\beta_1 u_2 \otimes v_1 + \alpha_2\beta_2 u_2 \otimes v_2.$$

Hätte der gegebene Tensor der Form

$$3u_1 \otimes v_1 + 6u_2 \otimes v_1 + 2(u_1 + u_2) \otimes v_2 = 3u_1 \otimes v_1 + 6u_2 \otimes v_1 + 2u_1 \otimes v_2 + 2u_2 \otimes v_2$$

Rang Eins, dann müsste also gelten (Koeffizientenvergleich), dass

$$\alpha_1\beta_1 = 3, \quad \alpha_1\beta_2 = 2$$

$$\alpha_2\beta_1 = 6, \quad \alpha_2\beta_2 = 2.$$

Aus der ersten Spalte folgt $\alpha_2 = 2\alpha 1$, aus der zweiten Spalte folgt $\alpha_1 = \alpha_2$ und damit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, was einen Widerspruch liefert und zeigt, dass keine Rang Eins Darstellung existiert. (2 Punkte)

Intuitiv beobachtet man, dass die freien mn Parameter einer beliebiger $m \times n$ Matrix/eines beliebigen $U \times V$ Tensors (bis auf Randfälle) viel mehr sind als die $m + n$ freien Parameters eines einfachen Tensors. Die "meisten"Tensoren sind in diesem Sinn nicht einfach. Außerdem sieht man, dass die Tensoren von Rang Eins keinen Unterraum im Tensorproduktraum bilden. Das hätte man aber auch einfacher daran sehen können, dass die Summe eines Tensors und dem gleichen Tensor mit -1 multipliziert den Nulltensor mit Rang Null liefert.

Hausaufgabe II-3.4 (Isomorphie von Bilinearformen und Homom. auf dem Tensorprodukt) 3 Punkte

Es seien U, V und W Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Zeigen Sie Satz 22.14, also dass die Abbildung

$$\operatorname{Bil}(U \times V; W) \ni g \mapsto f \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$$

(definiert durch die Eigenschaft $g = f \circ \otimes$, siehe Satz 22.12) ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Lösung.

Die Wohldefiniertheit der Abbildung ist bereits durch Satz 22.12 gesichert. (1 Punkt)

Für den Nachweis der Linearität seien $\alpha \in K$ und $g, \tilde{g} \in \operatorname{Bil}(U \times V; W)$ mit ihren Bildern $f, \tilde{f} \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$ gegeben. Auf Grund der punktweisen Verknüpfungen der Abbildungen ist dann

$$g + \alpha\tilde{g} = f \circ \otimes + \alpha(\tilde{f} \circ \otimes) = f \circ \otimes + (\alpha\tilde{f}) \circ \otimes = (f + \alpha\tilde{f}) \circ \otimes,$$

was die Linearität zeigt. (1 Punkt)

Die Surjektivität ist Teil der Aussage Satz 22.12 (Aussage (i) zeigt Wohldefiniertheit, Aussage (ii) zeigt Surjektivität).

Die Injektivität folgt dann sofort aus der definierenden Eigenschaft des Bilinearform-darstellenden Homomorphismus. Ist nämlich f der Homomorphismus zu den Bilinearformen g und $\tilde{g}$, dann stimmen g und $\tilde{g}$ auf $U \times V$ überein, sind nämlich $f(u \otimes v)$ für beliebige $(u, v) \in U \times V$, sind also gleich. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.