R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 2

Ausgabedatum: 22. April 2024
Abgabedatum: 29. April 2024

Hausaufgabe II-2.1 (Basics zur dualen Abbildung) 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 6 Punkte

Beschreiben Sie das Verhalten der dualen Abbildungen zu den folgenden Vektorraumhomomorphismen.

(a) $\mathbb{Q}^3 \in x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{R}^\mathbb{N} \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ jeweils über $\mathbb{R}$

(c) $U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum U von V, jeweils über dem gleichen Körper K

(d) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4), \triangle, \cdot) \ni A \mapsto A \cap \{1, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$, jeweils über $\mathbb{Z}_2$

Hausaufgabe II-2.2 (Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen) 2 Punkte

Es seien K ein Körper und U, V und W Vektorräume über K sowie $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $g \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Zeigen Sie Lemma 21.29, also dass dann für die duale Abbildung der Komposition $f \circ g \in \operatorname{Hom}(U, W)$ gilt:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Hausaufgabe II-2.3 (Darstellungsmatrizen einer linearen Abbildung) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Gegeben sei $B := (p_1, p_2, p_3)$ mit $p_1 := 1 + t + t^2$, $p_2 := 1 + 2t + t^2$, $p_3 := 2 + t - 2t^2$.

(a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von $\mathbb{R}_2[t]$ über $\mathbb{R}$ ist.

Gegeben sei nun weiterhin die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}_2[t] \mapsto \mathbb{R}_2[t]$ definiert über $f(p_1) = p_1 - p_3$, $f(p_2) = p_1, f(p_3) = p_2$.

(b) Stellen Sie f und f^* bzgl. B bzw. der dazugehörigen dualen Basis dar, bestimmen Sie also $\mathcal{M}_B^B(f)$ und $\mathcal{M}_{B^*}^{B^*}(f^*)$.

(c) Stellen Sie f und f^* bzgl. der Monombasis bzw. der dazugehörigen dualen Basis dar, bestimmen Sie also $\mathcal{M}_M^M(f)$ und $\mathcal{M}_{M^*}^{M^*}(f^*)$, wobei M die Monombasis bezeichnet.

Hausaufgabe II-2.4 (Eigenwerte der dualen Abbildung) 2.5 + 3.5 = 6 Punkte

(a) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und f ein V-Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f und f^* die gleichen Eigenwerte besitzen, und dass sogar $\dim(\operatorname{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})) = \dim(\operatorname{Kern}(f^* - \lambda \mathrm{id}^*))$ für alle $\lambda \in K$.

(b) Es sei $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ der Linksshift, also $f(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (x_2, x_3, \dots)$. Zeigen Sie, dass jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f ist, aber f^* keinen Eigenwert besitzt.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.