R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg



# Übung II - 2 (Lösung)

Ausgabedatum: 22. April 2024
Abgabedatum: 29. April 2024

**Hausaufgabe II-2.1** (Basics zur dualen Abbildung) 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 6 Punkte

Beschreiben Sie das Verhalten der dualen Abbildungen zu den folgenden Vektorraumhomomorphismen.

(a) $\mathbb{Q}^3 \in x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{R}^\mathbb{N} \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ jeweils über $\mathbb{R}$

(c) $U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum $U$ von $V$, jeweils über dem gleichen Körper $K$

(d) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4), \triangle, \cdot) \ni A \mapsto A \cap \{1, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$, jeweils über $\mathbb{Z}_2$

**Lösung.**

In der Lösung wird die Abbildung immer mit $f$ bezeichnet und die duale mit $f^*$.

(a) Für alle $v^* \in \mathbb{Q}^3$ und $v \in \mathbb{Q}$ ist

$$(f^*(v^*))(v) = (v^*)(f(v)) = v^*(\lambda v) = \lambda v^*(v) = (\lambda v^*)(v)$$

und damit ist die duale Abbildung der Skalierung die gleiche Skalierung der Abbildungen im Dualraum. (1.5 Punkte)

(b) Diese Aufgabe ist vor allem auf Grund des Auftretens des Linksshifts in Hausaufgabe II-2.4 hier mit aufgenommen. Sie gibt schonmal eine gute Intuition, warum die duale Abbildung keine Eigenwerte besitzt. Für alle $v^* \in (\mathbb{R}^\mathbb{N})^*$ und $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist nämlich

$$f^*(v^*)(x) = v^*(f(x)) = v^*(x_2, x_3, \dots)$$

die Funktion $f^*(v^*)$ arbeitet also wie $v^*$ nur auf dem Rest der Folge ab dem zweiten Element. Eine zusätzliche Veranschaulichung findet man, wenn man die linear unabhängigen Folgen $(e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots))$ nimmt. Diese bilden eine Basis der endlich getragenen Folgen. Für jedes Element der linear unabhängigen Menge der dualen Elemente $\langle\{e_i^* \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$ sieht man dann, dass

$$f^*(e_i^*)(e_j) = e_i^*(f(e_j)) = e_i^*(e_{j-1}) = \delta_{i,(j-1)}$$

also dass $f^*(e_i^*) = e_{i+1}^*$. Das zeigt gerade, dass (zumindest auf den endlich getragenen Folgen) $f^*$ als Rechtsshift arbeitet. (1.5 Punkte)

(c) Für jedes $v^* \in V^*$ und $u \in U$ ist

$$f^*(v^*)(u) = v^*(f(u)) = \underbrace{v^*}_{\in V^*}(\underbrace{u}_{\in V}) = \underbrace{v^*|_U}_{\in U^*}(\underbrace{u}_{\in U}),$$

die zur Einbettung duale Abbildung ist also die Restriktion. (1.5 Punkte)

(d) Die Abbildung $f$ bildet jede Teilmenge von $\mathbb{Z}_4$ auf deren Teilmenge der ungeraden Elemente ab. Entsprechend ist

$$f^*(v^*)(M) = v^*(f(M)).$$

Die duale Basis zur Punktmengenbasis besteht aus Indikatorfunktionen zur Existenz der Punkte in dem eingesetzten Element $M \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$. Jede Linearkombination zu einem $v^*$ gibt also aus, ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Elementen der an $v^*$ beteiligten Basiselemente in $M$ enthalten sind. Die duale Abbildung ändert diese Abfrage auf die gerade oder ungerade Anzahl von ungeraden Elementen in $M$. (1.5 Punkte)

**Hausaufgabe II-2.2** (Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen) 2 Punkte

Es seien $K$ ein Körper und $U$, $V$ und $W$ Vektorräume über $K$ sowie $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $g \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Zeigen Sie Lemma 21.29, also dass dann für die duale Abbildung der Komposition $f \circ g \in \operatorname{Hom}(U, W)$ gilt:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

**Lösung.**

Für alle $u \in U$ und $w^* \in W$ ist

$$(f \circ g)^*(w^*)(u) = w^*((f \circ g)(u)) = w^*(\underbrace{f(g(u))}_{w}) = \underbrace{f^*(w^*)}_{v^*}(\underbrace{g(u)}_{v}) = \underbrace{g^*(\underbrace{f^*(w^*)}_{v^*})}_{u^*}(u) = (g^* \circ f^*)(w^*).$$

(2 Punkte)

**Hausaufgabe II-2.3** (Darstellungsmatrizen einer linearen Abbildung) 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Gegeben sei $B := (p_1, p_2, p_3)$ mit $p_1 := 1 + t + t^2, p_2 := 1 + 2t + t^2, p_3 := 2 + t - 2t^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $B$ eine Basis von $\mathbb{R}_2[t]$ über $\mathbb{R}$ ist.

Gegeben sei nun weiterhin die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}_2[t] \mapsto \mathbb{R}_2[t]$ definiert über $f(p_1) = p_1 - p_3$, $f(p_2) = p_1, f(p_3) = p_2$.

(b) Stellen Sie $f$ und $f^*$ bzgl. $B$ bzw. der dazugehörigen dualen Basis dar, bestimmen Sie also $\mathcal{M}_B^B(f)$ und $\mathcal{M}_{B^*}^{B^*}(f^*)$.

(c) Stellen Sie $f$ und $f^*$ bzgl. der Monombasis bzw. der dazugehörigen dualen Basis dar, bestimmen Sie also $\mathcal{M}_M^M(f)$ und $\mathcal{M}_{M^*}^{M^*}(f^*)$, wobei $M$ die Monombasis bezeichnet.

**Lösung.**

(a) Lineare Unabhängigkeit folgt aus Vollrang der Koordinatenmatrix, wie man aus der ZSF-Transformation

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

und die Erzeugendeneigenschaft folgt aus dem Dimensionssatz beziehungsweise dem Austauschsatz. (1 Punkt)

(b) Die Darstellung von $f$ bezüglich $B$ (beidseitig), also $\mathcal{M}_B^B(f)$, liest man an der Definition der Bilder sofort als

$$\mathcal{M}_B^B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ab. (1 Punkt) Die Darstellung von $f^*$ bezüglich $B^*$ ergibt sich entsprechend Satz 21.33 zu

$$\mathcal{M}_{B^*}^{B^*}(f^*) = (\mathcal{M}_B^B(f))^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(c) Die Basiswechselmatrix $\mathcal{T}_M^B$ ist durch

$$\mathcal{T}_M^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

gegeben und kann auf Grund der einfachen Gestalt der Monombasis direkt abgelesen werden. Die Inverse ist

$$\mathcal{T}_B^M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Entsprechend ist

$$\mathcal{M}_M^M(f) = \mathcal{T}_M^B \mathcal{M}_B^B(f) \mathcal{T}_B^M = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 2 & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} & -2 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

und die duale Abbildung hat wieder die Transponierte als Darstellung, also

$$\mathcal{M}_{M^*}^{M^*}(f^*) = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 2 & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} & -2 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\ 2 & 1 & -2 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

(2 Punkte)

**Hausaufgabe II-2.4** (Eigenwerte der dualen Abbildung) 2.5 + 3.5 = 6 Punkte

(a) Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und $f$ ein $V$-Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $f$ und $f^*$ die gleichen Eigenwerte besitzen, und dass sogar $\dim(\mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})) = \dim(\mathrm{Kern}(f^* - \lambda \mathrm{id}^*))$ für alle $\lambda \in K$.

(b) Es sei $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ der Linksshift, also $f(x_1, x_2, \dots) \coloneqq (x_2, x_3, \dots)$. Zeigen Sie, dass jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $f$ ist, aber $f^*$ keinen Eigenwert besitzt.

**Lösung.**

(a) $\dim(\mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}))$ ist genau dann 0, wenn $\lambda$ kein Eigenwert von $f$ ist, anderenfalls ist die Dimension positiv und $\lambda$ ein Eigenwert. Das Gleiche gilt natürlich für $f^*$ und $\mathrm{id}^*$ genauso.

Weiterhin ist wegen Sätze 21.23, 21.30 und 21.36 und des Dimensionssatzes

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathrm{Kern}(f^* - \lambda \mathrm{id}^*)\big) &= \dim\big(\mathrm{Kern}((f - \lambda \mathrm{id})^*)\big) && \text{(Duale Zuordnung ist linear)} \\
&= \dim\big(\mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^0\big) && \text{(Kern gegen Annihilator getauscht)} \\
&= \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})) && \text{(Dimension des Annihilators)} \\
&= \dim(\mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})). && \text{(Dimensionssatz)}
\end{aligned}$$

(2.5 Punkte)

(b) Sei $\lambda$ beliebig. Dann ist die Folge $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ ein Eigenvektor des Linksshifts zum Eigenwert $\lambda$. (1 Punkt)

Wenn für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v^* \in V^*$ sowie für alle $v \in V$ die Bedingung

$$\lambda v^*(v) = f^*(v^*)(v) = v^*(f(v))$$

gilt, dann ist

$$v^*((f - \lambda \mathrm{id})(v)) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Die Abbildung $f - \lambda\mathrm{id}$ ist aber surjektiv, denn für die Folge $(y_1, y_2, \dots)$ ist die rekursiv definierte Folge $(x_1, x_2, \dots)$ mit beliebigem Start $x_1$ und $x_{k+1} \coloneqq y_k + \lambda x_k$ ein Urbild zu $(y_1, y_2, \dots)$ unter $f - \lambda\mathrm{id}$. Daher muss $v^* = 0$ sein, womit kein Eigenpaar existiert. (2.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.