R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 1

Ausgabedatum: 15. April 2024
Abgabedatum: 22. April 2024

Hausaufgabe II-1.1 (Basics zu Linearformen und Dualräumen) 3 + 2 + 2 + 2 = 9 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Linearformen sind.

- (i) $\mathbb{Q}_3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{Q}$
- (ii) $\mathbb{R}_3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_2$ jeweils über $\mathbb{R}$
- (iii) $\mathbb{Q}[t] \ni p \mapsto (p + t^2)(\alpha) \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$
- (iv) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2) \ni A \mapsto \#A \mod 2 \in (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

(b) Es sei U ein Unterraum vom Vektorraum V. Zeigen Sie, dass U^* höchstens gleichmächtig zu V^* ist.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Räume.

(i) $(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2})^*$, jeweils über $\mathbb{Z}_2$ (ii) $(\mathbb{R}_4[t])^*$, jeweils über $\mathbb{Q}$ (iii) $(\mathbb{R}_5^*)^*$, jeweils über $\mathbb{R}$

(d) Es sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass genau dann $v_1 = v_2$ gilt, wenn $v^*(v_1) = v^*(v_2)$ für alle $v^* \in V^*$.

Hausaufgabe II-1.2 (Duale Basen) 3 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F^* \subseteq V^*$ sowie $v^* \in V^*$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $v^* \in \langle F^* \rangle$

(b) $\bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)$

Hinweis: Nutzen Sie, dass jede Basis B_V^* von V^* die duale Basis zu einer Basis B_V von V ist (was wir später noch beweisen werden).

Hausaufgabe II-1.3 (Darstellung von Linearformen) 2 + 2 + 4 = 8 Punkte

(a) Geben seien die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ als $E := (e_1, e_2, e_3)$ und $B := (2e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3)$. Bestimmen Sie $E^* \cap B^*$.

(b) Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $B_V^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zu B_V duale Basis von V^*. Zeigen Sie Lemma 21.15, also die folgenden Aussagen:

(i) Für den Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}$ eines Vektors $v \in V$ gilt

$$x_i = \langle v_i^*, v \rangle, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(ii) Für den Koordinatenvektor $\xi = \Phi_{B_V^*}^{-1}$ einer Linearform $v^* \in V^*$ gilt

$$\xi_i = \langle v^*, v_i \rangle, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(c) Es sei $V := \mathbb{Q}_2[t]$ mit den geordneten Basen $B := \big(1, 1 + 2t, 1 + 2t + 3t^2\big)$ und $\widehat{B} := \big(1, 1 + t, 1 + t + t^2\big)$.

(i) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von $v := 6 + 6t + 3t^2$ bzgl. B und der Darstellung der Linearform $v^* := p \mapsto 2p(0) + p(1)$ bzgl. B^*.

(ii) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathcal{T}_{\widehat{B}}^{B}$ und $\mathcal{T}_{\widehat{B}^*}^{B^*}$.

(iii) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von v und v^* bzgl. $\widehat{B}$ und $\widehat{B}^*$.

Hausaufgabe II-1.4 ((Prä-)-Annihilatoren) 1 + 0.5 + 4.5 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\{(0, 1, 2)\}^0$ in $\mathbb{R}_3^*$ über $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{p \mapsto p(1) - p(0)\}$ in $(\mathbb{R}_1[t])^*$ über $\mathbb{R}$.

(c) Es seien V ein K-Vektorraum und $M_1, M_2 \subseteq V$, W_1, W_2 Unterräume von V sowie $F_1, F_2 \subseteq V^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^0 \subseteq M_1^0$.
(ii) $M^0 = \langle M \rangle^0$.
(iii) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow {}^0(F_2) \subseteq {}^0(F_1)$.
(iv) ${}^0F = {}^0\langle F \rangle$.
(v) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$
(vi) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.