R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 1 (Lösung)

Ausgabedatum: 15. April 2024
Abgabedatum: 22. April 2024

Hausaufgabe II-1.1 (Basics zu Linearformen und Dualräumen) 3 + 2 + 2 + 2 = 9 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Linearformen sind.

(i) $\mathbb{Q}_3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{R}_3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_2$ jeweils über $\mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{Q}[t] \ni p \mapsto (p + t^2)(\alpha) \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$

(iv) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2) \ni A \mapsto \#A \mod 2 \in (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

(b) Es sei U ein Unterraum vom Vektorraum V. Zeigen Sie, dass U^* höchstens gleichmächtig zu V^* ist.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Räume.

(i) $(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2})^*$, jeweils über $\mathbb{Z}_2$ (ii) $(\mathbb{R}_4[t])^*$, jeweils über $\mathbb{Q}$ (iii) $(\mathbb{R}_5^*)^*$, jeweils über $\mathbb{R}$

(d) Es sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass genau dann $v_1 = v_2$ gilt, wenn $v^*(v_1) = v^*(v_2)$ für alle $v^* \in V^*$.

Lösung.

(a) (i) $\mathbb{Q}_3 \ni (x, y, z) \mapsto x \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{Q}$ ist keine Linearform, denn der Zielraum ist $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ und damit nicht der Körper des Ursprungsraums über sich selbst. Die Abbildung wird zu einer Linearform, wenn man den Bildraum auf $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ einschränkt, das ist gerade Teil von Beispiel 21.2. (0.5 Punkte)

(ii) $\mathbb{R}_3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}_2$ jeweils über $\mathbb{R}$ ist keine Linearform, denn der Zielraum ist kein Körper über sich selbst. (0.5 Punkte)

(iii) $\mathbb{Q}[t] \ni p \mapsto (p + t^2)(\alpha) \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$ benötigt eine Fallunterscheidung. In diesem Beispiel passen die (Ur-)Bildräume zusammen. Für $\alpha \neq 0$ zeigt $0 \mapsto (0 + t^2)(\alpha) = \alpha^2 \neq 0$, dass die Abbildung nicht linear ist. Für $\alpha = 0$ ist $p \mapsto p(0)$ aber gerade eines der Beispiele in Beispiel 21.2 und damit eine Linearform. (1 Punkt)

(iv) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_8), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2) \ni A \mapsto \#A \mod 2 \in (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ jeweils über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ passt von den Räumen her, es bleibt nur die Linearität zu prüfen. Hierfür seien $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_8)$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, die Abbildung bezeichnen wir von nun ab mit f. Dann ist

$$
\begin{aligned}
f(\alpha B) &= \#(\alpha B) \mod 2 = (\#B \mod 2) = f(B) = \alpha f(B) \quad \text{für } \alpha = 1 \\
f(\alpha B) &= \#(\emptyset) \mod 2 = 0 = \alpha f(B) \quad \text{für } \alpha = 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
f(A \triangle B) &= \#(A \triangle B) \mod 2 = (\#A + \#B - 2\#(A \cap B)) \mod 2 \\
&= \#A \mod 2 + \#B \mod 2 = f(A) + f(B)
\end{aligned}
$$

und damit handelt es sich um eine Linearform. (1 Punkt)

(b) Um höchstens Gleichmächtigkeit der Mengen zu zeigen mussen wir eine Bijektion von U^* auf eine Teilmenge von V^* angeben. Eine naheliegende Möglichkeit dies zu tun ist, die Funktionen aus U^* auf ganz V^* fortzusetzen.

Sei also B_U eine Basis von U und B_V eine Basisergänzung von B_U zu einer Basis von V, also $B_U \subseteq B_V$. Sei $f \in U^*$ beliebig. Wir definieren f_V als die eindeutige lineare Abbildung aus V^*, die $f_V(u) = f(u)$ für alle $u \in B_U$ und $f_V(v) = 0$ für alle $v \in B_V \setminus B_U$ erfüllt. Damit ist die Abbildung $\Psi \colon U^* \to V^*$ mit $\Psi(f) \coloneqq f_V$ wohldefiniert. (1 Punkt)

Da für jedes f auch f_V eindeutig festgelegt ist, ist Ψ injektiv und damit die Einschränkung der Abbildung Ψ auf ihr Bild (eine Teilmenge von V^*) surjektiv. (1 Punkt)

(c) (i) Die Dimension von $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2}$ über $\mathbb{Z}^2$ ist 2, eine Basis ist beispielsweise durch die kanonische Basis aus den charakteristischen Funktionen $\{e_0, e_1\}$ gegeben. Der Dualraum hat also auch die Dimension 2, siehe Satz 21.10. (0.5 Punkte)

(ii) $\mathbb{R}_4[t]$ ist über $\mathbb{Q}$ unendlichdimensional, denn bereits der echte Unterraum $\mathbb{R}_0[t] \cong \mathbb{R}$ ist über $\mathbb{Q}$ unendlichdimensional. Der Dualraum ist entsprechend ebenfalls unendlichdimensional, siehe Bemerkung 21.14. (1 Punkt)

(iii) $\mathbb{R}^5$ ist über $\mathbb{R}$ offensichtlich fünfdimensional, der vorliegende Raum ist also ebenfalls fünfdimensional, wie mehrfache Anwendung von Satz 21.10 zeigt. (0.5 Punkte)

(d) Wir setzen $v \coloneqq v_1 - v_2$.

Ist $v = 0$, dann wissen wir aus den grundlegenden Eigenschaften der linearen Abbildungen, dass $v^*(v) = 0$ für alle $v^* \in V^*$ und damit $v^*(v_1) = v^*(v_2)$ für alle $v^* \in V^*$. (1 Punkt)

Ist $v \neq 0$, dann ist $\{v\}$ linear unabhängig und es existiert eine lineare Abbildung mit $v^*(v) = v^*(v_1) - v^*(v_2) = 1 \neq 0$, siehe Satz 17.7 und damit $v^*(v_1) \neq v^*(v_2)$. (1 Punkt)

Hausaufgabe II-1.2 (Duale Basen) 3 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F^* \subseteq V^*$ sowie $v^* \in V^*$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $v^* \in \langle F^* \rangle$

(b) $\bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)$

Hinweis: Nutzen Sie, dass jede Basis B_V^* von V^* die duale Basis zu einer Basis B_V von V ist (was wir später noch beweisen werden).

Lösung.

Ist $v^* \in \langle F^* \rangle$, dann ist $v^* = \sum_{i=1}^n f_i$ für $f_i \in F^*$, $i = 1, \dots, n$ und damit für jedes $v \in \bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f)$ auch $v^*(v) = \sum_{i=1}^n f_i(v) = 0$, also $\bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)$. (1 Punkt)

Sei nun $\bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)$. Wir wählen eine Basis $B_{F^*} \subseteq F^*$ von $\langle F^* \rangle$ und ergänzen diese zu einer Basis B_{V^*} von V^*. Die Basis von V, zu der B_V^* die duale ist, nennen wir B_V mit der zu B_{F^*} gehörigen Teilmenge $B_F \subseteq B_V$.

Auf Grund der Definition der dualen Basis ist $B_F \cap \bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f) = \emptyset$ und $B_V \setminus B_F \subseteq \bigcap_{f \in F^*} \operatorname{Kern}(f)$. Also ist v^* die Nullfunktion auf $B_V \setminus B_F$, v^* hat also keine Anteile von $B_{V^*} \setminus B_{F^*}$ und damit $v^* \in \langle B_F^* \rangle = \langle F^* \rangle$. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-1.3 (Darstellung von Linearformen) 2 + 2 + 4 = 8 Punkte

(a) Geben seien die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ als $E \coloneqq (e_1, e_2, e_3)$ und $B \coloneqq (2e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3)$. Bestimmen Sie $E^* \cap B^*$.

(b) Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $B_V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zu B_V duale Basis von V^*. Zeigen Sie Lemma 21.15, also die folgenden Aussagen:

(i) Für den Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}$ eines Vektors $v \in V$ gilt

$$x_i = \langle v_i^*, v \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

(ii) Für den Koordinatenvektor $\xi = \Phi_{B_V^*}^{-1}$ einer Linearform $v^* \in V^*$ gilt

$$\xi_i = \langle v^*, v_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

(c) Es sei $V := \mathbb{Q}_2[t]$ mit den geordneten Basen $B := \big(1, 1 + 2t, 1 + 2t + 3t^2\big)$ und $\widehat{B} := \big(1, 1 + t, 1 + t + t^2\big)$.

(i) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von $v := 6 + 6t + 3t^2$ bzgl. B und der Darstellung der Linearform $v^* := p \mapsto 2p(0) + p(1)$ bzgl. B^*.

(ii) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathcal{T}_{\widehat{B}}^{B}$ und $\mathcal{T}_{\widehat{B}^*}^{B^*}$.

(iii) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung von v und v^* bzgl. $\widehat{B}$ und $\widehat{B}^*$.

Lösung.

(a) Um die dualen Basen zu bestimmen und zu vergleichen um ihren Schnitt zu bestimmen benötigen wir eine Darstellung der dualen Basiselemente bezüglich einer gemeinsamen Basis. Am einfachsten ist es hier, die Dualbasiselemente bezüglich einer der Dualbasen darzustellen, wir wählen hier E^*. Dann ist sofort klar, dass

$$E^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{E^*}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{E^*}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{E^*} \right\}$$

(1 Punkt)

Die Darstellung der Elemente von B^* bezüglich E^* erhalten wir gemäß Lemma 21.15 durch Auswerten der Elemente von B^* and den Elementen von E. Das sind aber auch genau die Einträge der Basiswechselmatrix $\mathcal{M}_{E^*}^{B^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = \mathcal{M}_{E}^{B}(\mathrm{id}_V)^{-T}$. Da es sich bei E um die kanonische

Basis handelt ist $\mathcal{M}_E^B(\mathrm{id}_V)$ gerade die Matrix, in der spaltenweise die Elemente von B bezüglich E dargestellt stehen, also die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deren Inverstransponierte ist

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

also ist

$$B^* = \{(2e_1 + e_2 + e_3)^*_{B_1^*}, (e_2)^*_{B_1^*}, (e_3)^*_{B_1^*}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{E^*}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{E^*}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{E^*} \right\}.$$

Die duale Basis ändert sich also vollständig und der Schnitt der dualen Basen ist entsprechend leer, obwohl in der primalen Basis nur ein Vektor ausgetauscht wurde. Dabei hat das Skalieren von e_1 das Element e_1^* verändert und die Summenbildung die Elemente e_2^*, e_3^*. (1 Punkt)

(b) Es ist

$$\langle v_i^*, v \rangle = \langle v_i^*, \sum_{j=1}^n x_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle v_i^*, v \rangle_j = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{ij} = x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

(1 Punkt)

Weiter ist

$$\langle v^*, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \xi_j v_j^*, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \langle v_j^*, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \delta_{ij} = \xi_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

(1 Punkt)

(c) (i) Die Darstellungen von p bezüglich B erhält man als die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

als $\Phi_B^{-1}(v) = (3, 2, 1)^\top$. (1 Punkt)

Die Darstellung von v^* bezüglich B^* erhalten wir durch Auswerten an den Elementen von B als

$$\Phi_{B^*}^{-1}(v^*) = \begin{pmatrix} v^*(1) \\ v^*(1 + 2t) \\ v^*(1 + 2t + 3t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

(ii) Die Basiswechselmatrizen sind

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

und deren Transponiertinverse

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}^*}^{B^*} = \mathcal{T}_{\widehat{B}}^{B\,-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(iii) Man multipliziert die Basiswechselmatrizen mit den Koeffizientenvektoren aus der ersten Teilaufgabe und erhält $\Phi_{\widehat{B}}^{-1}(v) = (0,3,3)^\intercal$ und $\Phi_{\widehat{B}^*}^{-1}(v^*) = (3,4,5)^\intercal$

(1 Punkt)

Hausaufgabe II-1.4 ((Prä-)-Annihilatoren) 1 + 0.5 + 4.5 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\{(0,1,2)\}^0$ in $\mathbb{R}_3^*$ über $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{p \mapsto p(1) - p(0)\}$ in $(\mathbb{R}_1[t])^*$ über $\mathbb{R}$.

(c) Es seien V ein K-Vektorraum und $M_1, M_2 \subseteq V$, W_1, W_2 Unterräume von V sowie $F_1, F_2 \subseteq V^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^0 \subseteq M_1^0$.
(ii) $M^0 = \langle M \rangle^0$.
(iii) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow {}^0(F_2) \subseteq {}^0(F_1)$.
(iv) ${}^0F = {}^0\langle F \rangle$.
(v) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$
(vi) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Lösung.

(a) Wir ergänzen $\{(0,1,2)\}$ durch $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}_3$. Deren duale Basis besteht nun aus 3 Elementen, ist eine Basis von $\mathbb{R}_3^*$ und eines der Elemente ist nicht im Annihilator, während es die anderen beiden sind, also ist $\{e_2^*, e_3^*\}$ eine Basis des Annihilators. Bezüglich der dualen der kanonischen Basis haben diese die Darstellung in den hinteren beiden Spalten von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

(b) Man kann aus der Definition direkt ablesen, dass ${}^0\{p \mapsto p(1) - p(0)\} = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$, eine Basis ist also durch $\{1\}$ gegeben.

(0.5 Punkte)

(c) (i) Ist $M_1 \subseteq M_2$ und $f \in M_2^0$, dann ist $f(m) = 0$ für alle $m \in M_1 \subseteq M_2$. (0.5 Punkte)

(ii) Da $M \subseteq \langle M \rangle$ ist $M^0 \supseteq \langle M \rangle^0$ klar. Die $\subseteq$ Inklusion folgt sofort, da $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(m_i) = 0$ für $m_i \in M$. (0.5 Punkte)

(iii) Ist $F_1 \subseteq F_2$ und $v \in {}^0F_2$, dann ist $f(v) = 0$ für alle $v \in F_1 \subseteq F_2$. (0.5 Punkte)

(iv) Da $F \subseteq \langle F \rangle$ ist ${}^0F \supseteq {}^0\langle F \rangle$ klar. Die $\subseteq$ Inklusion folgt sofort, da $(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(v) = 0$ für $f_i \in F$. (0.5 Punkte)

(v) Ist $f \in (W_1 + W_2)^0$, dann ist $f(w_1) = f(w_1 + 0) = 0$ für alle $w_1 \in W_1$ und das analoge Argument für W_2 liefert $(W_1 + W_2)^0 \subseteq W_1^0 \cap W_2^0$. (0.5 Punkte)

Ist $f \in W_1^0 \cap W_2^0$, dann ist für jedes $w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ auch $f(w) = f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = 0 + 0$ und damit $(W_1 + W_2)^0 \supseteq W_1^0 \cap W_2^0$. (0.5 Punkte)

(vi) Ist $f \in W_1^0 + W_2^0$, dann ist $f(w) = f_1(w) + f_2(w) = 0 + 0 = 0$ für alle $w \in (W_1 \cap W_2)$ und damit $(W_1 \cap W_2)^0 \supset W_1^0 + W_2^0$. (0.5 Punkte)

Ist $f \in (W_1 \cap W_2)^0$, dann ergänzen wir eine Basis $B_\cap$ von $(W_1 \cap W_2)$ zu einer Basis B_1 von W_1 und zu einer Basis B_2 von W_2. Dann ist $B_\cup := B_1 \cup B_2$ eine Basis von $W_1 + W_2$. Wir definieren f_1 auf $B_\cup$ durch f auf $B_\cup \setminus B_1$ und 0 auf B_1, also $f \in W_1^0$. Wir definieren f_2 auf $B_\cup$ durch f auf $B_\cup \setminus B_2$ und 0 auf B_2, also $f \in W_2^0$. Dann ist $f = f_1 + f_2$. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.