Anmerkungen zu diesem Dokument:

Für die Vorbereitung auf die von uns im SS 24 angebotenen Abschlussprüfungen möchten wir Ihnen gern zusätzliches Material zur Verfügung stellen. Unten stehend finden Sie zu diesem Zweck einige Aufgaben, deren Bearbeitung Sie in Ihre Vorbereitung einbeziehen können.

Bei der Verwendung dieses Materials muss Ihnen klar sein, dass es nicht möglich ist, Vorbereitungsmaterial zusammen zu stellen, das hinsichtlich Umfang und Schwierigkeitsgrad für jede/n von Ihnen mit den gewerteten Klausuren übereinstimmt. Ziehen Sie Rückschlüsse auf die gewerteten Klausuren an Hand dieses Dokument vorsichtig und seien Sie nicht überrascht, wenn sich dieses Dokument Ihrer Meinung nach in irgendeiner Komponente (Umfang, Schwierigkeit, Themenauswahl...) deutlich von den gewerteten Klausuren unterscheiden. Die unten stehenden Aufgaben geben vor allem Aufschluss darüber, wie typische Klausuraufgaben sich im *Stil* von den Übungsaufgaben unterscheiden, die Sie das Semester über bearbeitet haben.

Ansonsten gilt Folgendes:

- Das Layout dieses Dokuments entspricht ab der nächsten Seite im Wesentlichen dem derzeitigen Layout der Klausuren. Seite 2 dieses Dokuments ist die Titelseite und die folgenden Seiten gehören immer nebeneinander.

- Auch in den Klausuren wird es 15 Wahr/Falsch-Fragen geben. Das Bewertungsschema des Wahr/Falsch-Fragenteils wird voraussichtlich genau dem hier vorgelegten entsprechen. Die Gesamtpunktzahl von jeder der zwei gewerteten Klausuren wird 100 Punkte sein.

- Die „Musterlösungen“, die wir veröffentlichen werden, sind bewusst nur als Skizzen für die Selbstkontrolle formuliert. Sie entsprechen weder einer Optimallösung noch einer Minimallösung.

Klausurvorbereitung

23. Juli 2024

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (15 P.)	2 (10 P.)	3 (16 P.)	4 (13 P.)	5 (14 P.)	6 (16 P.)	7 (16 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 15 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit des Auswahlaxioms vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	☒	☐	Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)	☐	☒	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	☒	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■	☐	Wird nicht gewertet.
(5)	☒	☒	Wird nicht gewertet.
(6)	☐	☐	Wird nicht gewertet.

(Bi-/Dualität) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

	W	F	
(1)	☐	☐	Für $E \subseteq V^*$ ist der Annihilator E^0 ein Unterraum von V.
(2)	☐	☐	Eine Abbildung $f \in \operatorname{End}(V)$ stimmt nie mit ihrer dualen Abbildung f^* überein.
(3)	☐	☐	Ist $E \subseteq V$ linear abhängig, dann existiert kein $v^* \in V^*$ mit $\langle v^*, v\rangle = 1$ für alle $v \in E$.

(Multilinearität) Für den folgenden Fragenblock seien K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume und $(V \otimes W, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V und W.

	W	F	
(4)	☐	☐	V ist nicht isomorph zu $V \otimes W$.
(5)	☐	☐	Der Nulltensor ist der einzige Tensor von Rang 0 in $V \otimes W$.
(6)	☐	☐	Für $v \in V$, $w \in W$ und $\alpha \in K$ ist $(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w)$.

(Eigenwerte und -vektoren) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$.

	W	F	
(7)	☐	☐	Ist Null kein Eigenwert von f, dann ist f injektiv.
(8)	☐	☐	Die Menge $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ besteht ausschließlich aus Eigenvektoren von f.
(9)	☐	☐	Ist V endlich-dimensional und $\chi_f = (t - \lambda)^3 \in K[t]$, dann ist $\dim(V) = 3$.

(Normalformen von Endomorphismen) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

	W	F	
(10)	☐	☐	Es existiert eine Basis B von V, so dass $\mathcal{M}_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.
(11)	☐	☐	Sind U und W f-invariante Unterräume von V und $V = U + W$, dann kann f durch eine Blockdiagonalmatrix dargestellt werden.
(12)	☐	☐	μ_f teilt jedes Polynom, das f annuliert.

(Innenprodukträume über $\mathbb{R}$) Für den folgenden Fragenblock sei (V, γ) ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

	W	F	
(13)	☐	☐	Sind die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ jeweils γ-normiert, dann ist $\gamma(v_1, v_2) \in [-1, 1]$.
(14)	☐	☐	Die Abbildung f ist genau dann γ-orthogonal, wenn $\Lambda(f) \subseteq \{\pm 1\}$
(15)	☐	☐	Ist die Abbildung f γ-selbstadjungiert, dann ist f auch γ-normal.

Aufgabe 2. 10 Punkte

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien

- B eine Basis von V,
- B^* die zu B gehörige duale Basis von V^* und
- $(B^*)^*$ die zu B^* duale Basis von V^{**}.

Zeigen Sie, dass $(B^*)^* = i_V(B)$ ist.

Lösung.

Aufgabe 3. 16 Punkte

Es sei K ein Körper und U und V Vektorräume über K. Es seien weiterhin $(U \otimes V, \otimes)$ und $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ Tensorprodukträume von U und V im Sinne der abstraken Definition über die universelle Eigenschaft.

Zeigen Sie, dass ein Vektorraumisomorphismus $f \in \operatorname{Iso}(U \otimes V; U \tilde{\otimes} V)$ existiert, so dass $\tilde{\otimes} = f \circ \otimes$ gilt.

Lösung.

Aufgabe 4. 8 + 5 = 13 Punkte

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Zeigen Sie, dass wenn K algebraisch abgeschlossen ist und $\Lambda(f) = \{0\}$ ist, dann ist f nilpotent.

(b) Geben Sie ein Beispiel von V über $K = \mathbb{R}$ mit einem nicht nilpotenten f an, so dass $\Lambda(f) = \{0\}$.

Lösung.

Aufgabe 5. 14 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{2\times 2}$ mit Spur $A = 0$. Zeigen Sie, dass A^2 ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Lösung.

Aufgabe 6. 3 + 5 + 5 + 3 = 16 Punkte

Entscheiden und Begründen Sie, welche der unten stehenden rellen Matrizen

(a) in Diagonalform vorliegen,

(b) in Jordan-normalform vorliegen,

(c) in Frobenius-normalform vorliegen,

und erklären Sie, für welche von ihnen Sie nicht notwendigerweise alle Eigenwerte ablesen können.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung.

Aufgabe 7. 8 + 8 = 16 Punkte

Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler, reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie:

(a) Der einzige γ-selbstadjungierte und nilpotente Endomorphismus auf V ist die Nullabbildung.

(b) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ γ-selbstadjungiert, dann ist $f \circ g$ genau dann γ-selbstadjungiert, wenn f und g kommutieren.

Lösung.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 1.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 2.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Zusatzseite 3.