R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Lösungen(!!!)

Klausurvorbereitung

23. Juli 2024

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die reguläre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (15 P.)	2 (10 P.)	3 (16 P.)	4 (13 P.)	5 (14 P.)	6 (16 P.)	7 (16 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 15 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen*. In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit des Auswahlaxioms vorausgesetzt werden.

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	X		Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)		X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■		Wird nicht gewertet.
(5)	X	X	Wird nicht gewertet.
(6)			Wird nicht gewertet.

(Bi-/Dualität) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

	W	F	
(1)		X	Für $E \subseteq V^*$ ist der Annihilator E^0 ein Unterraum von V.
(2)	X		Eine Abbildung $f \in \operatorname{End}(V)$ stimmt nie mit ihrer dualen Abbildung f^* überein.
(3)		X	Ist $E \subseteq V$ linear abhängig, dann existiert kein $v^* \in V^*$ mit $\langle v^*, v \rangle = 1$ für alle $v \in E$.

(Multilinearität) Für den folgenden Fragenblock seien K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume und $(V \otimes W, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V und W.

	W	F	
(4)		X	V ist nicht isomorph zu $V \otimes W$.
(5)	X		Der Nulltensor ist der einzige Tensor von Rang 0 in $V \otimes W$.
(6)	X		Für $v \in V$, $w \in W$ und $\alpha \in K$ ist $(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w)$.

(Eigenwerte und -vektoren) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$.

	W	F	
(7)	X		Ist Null kein Eigenwert von f, dann ist f injektiv.
(8)		X	Die Menge $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ besteht ausschließlich aus Eigenvektoren von f.
(9)	X		Ist V endlich-dimensional und $\chi_f = (t - \lambda)^3 \in K[t]$, dann ist $\dim(V) = 3$.

(Normalformen von Endomorphismen) Für den folgenden Fragenblock sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

	W	F	
(10)	☐	☒	Es existiert eine Basis B von V, so dass $\mathcal{M}_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.
(11)	☒	☐	Sind U und W f-invariante Unterräume von V und $V = U + W$, dann kann f durch eine Blockdiagonalmatrix dargestellt werden.
(12)	☒	☐	μ_f teilt jedes Polynom, das f annuliert.

(Innenprodukträume über $\mathbb{R}$) Für den folgenden Fragenblock sei (V, γ) ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

	W	F	
(13)	☒	☐	Sind die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ jeweils γ-normiert, dann ist $\gamma(v_1, v_2) \in [-1, 1]$.
(14)	☐	☒	Die Abbildung f ist genau dann γ-orthogonal, wenn $\Lambda(f) \subseteq \{\pm 1\}$
(15)	☒	☐	Ist die Abbildung f γ-selbstadjungiert, dann ist f auch γ-normal.

Lösung.

Jeweils einen Punkt pro Aussage möglich, also maximal (15 Punkte)

(1) Die Aussage ist falsch, denn der Annihilator einer Teilmenge des Dualraums ist Teilmenge des Bidualraums.

(2) Die Aussage ist korrekt, denn die duale Abbildung liegt in $\operatorname{End}(V^*)$ und nicht in $\operatorname{End}(V)$.

(3) Die Aussage ist falsch, siehe beispielsweise die Menge

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$$

und die entsprechend auf zwei der Vektoren mit Wert 1 festgelegte Abbildung.

(4) Die Aussage ist falsch, zum Beispiel können V und W Nullvektorräume sein, dann ist das auch für $V \otimes W$ der Fall.

(5) Die Aussage ist korrekt, siehe Lemma 22.11.

(6) Die Aussage ist korrekt und folgt sofort aus der Bilinearität der Tensorabbildung.

(7) Die Aussage ist korrekt, siehe Lemma 24.4.

(8) Die Aussage ist falsch, denn Eigenräume sind Unterräume und enthalten entsprechend den Nullvektor, welcher per Definition kein Eigenvektor ist.

(9) Die Aussage ist korrekt, denn das charakteristische Polynom von f ist ein normiertes Polynom dessen Grad die Raumdimension ist.

(10) Die Aussage ist falsch, denn nicht jeder Endomorphismus ist diagonalisierbar, manche haben keinen einzigen Eigenwert, siehe Rotationsabbildung.

(11) Die Aussage ist korrekt, auch eine vollbesetzte Matrix hat Blockstruktur mit einem einzigen Block. Feiner kriegt man das im Allgemeinen aber nicht, siehe der Fall $U = W = V$.

(12) Die Aussage ist korrekt, per Definition des Minimalpolynoms.

(13) Die Aussage ist korrekt, sie folgt sofort aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung.

(14) Die Aussage ist falsch, im Allgemeinen gilt nur eine Implikation. Für eine Drehstreckung um 90 Grad mit Streckfaktor 2 existiert kein einziger Eigenwert und keine Längenerhaltung, also auch keine γ-Orthogonalität.

(15) Die Aussage ist korrekt, siehe Lemma 34.49.

Aufgabe 2. 10 Punkte

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien

- B eine Basis von V,
- B^* die zu B gehörige duale Basis von V^* und
- $(B^*)^*$ die zu B^* duale Basis von V^{**}.

Zeigen Sie, dass $(B^*)^* = i_V(B)$ ist.

Lösung.

Für die Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ bennen wir die duale Basis $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ und deren duale Basis $(B^*)^* = (v_1^{**}, \ldots, v_n^{**})$.

Dann ist

$$\langle i_V(B)(v_i), v_j^* \rangle = \langle v_j^*, v_i \rangle = \delta_{ij}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, was gerade die definierende Eigenschaft der eindeutigen dualen Basis ist, womit gerade $i_V(B)(v_i) = v_i^{**}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und damit $(B^*)^* = i_V(B)$ folgt. (10 Punkte)

Aufgabe 3. 16 Punkte

Es sei K ein Körper und U und V Vektorräume über K. Es seien weiterhin $(U \otimes V, \otimes)$ und $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ Tensorprodukträume von U und V im Sinne der abstraken Definition über die universelle Eigenschaft.

Zeigen Sie, dass ein Vektorraumisomorphismus $f \in \operatorname{Iso}(U \otimes V; U \tilde{\otimes} V)$ existiert, so dass $\tilde{\otimes} = f \circ \otimes$ gilt.

Lösung.

Die Tensorabbildungen sind Bilinearformen mit $\otimes \in \operatorname{Bil}(U, V; U \otimes V)$ und $\tilde{\otimes} \in \operatorname{Bil}(U, V; U \tilde{\otimes} V)$. Auf Grund der universellen Eigenschaften gibt es dann $f \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; U \tilde{\otimes} V)$ und $\tilde{f} \in \operatorname{Hom}(U \tilde{\otimes} V; U \otimes V)$, die diese Bilinearformen bezüglich des jeweils anderen Tensorproduktraums darstellen, also so dass

$$\tilde{\otimes} = f \circ \otimes \quad \text{und} \quad \otimes = \tilde{f} \circ \tilde{\otimes}.$$

Kombiniert man diese beiden Darstellungen, dann erhält man

$$\tilde{\otimes} = f \circ \otimes = f \circ \tilde{f} \circ \tilde{\otimes} \quad \text{und} \quad \otimes = \tilde{f} \circ \tilde{\otimes} = \tilde{f} \circ f \circ \otimes.$$

Allerdings gilt auch

$$\tilde{\otimes} = \mathrm{id}_{U \tilde{\otimes} V} \circ \tilde{\otimes} \quad \text{und} \quad \otimes = \mathrm{id}_{U \otimes V} \circ \otimes$$

und wegen der Eindeutigkeit der Darstellungen von $\otimes$ und $\tilde{\otimes}$ im Sinne der universellen Eigenschaft folgt

$$\tilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{U \otimes V} \quad \text{und} \quad f \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{U \tilde{\otimes} V}$$

und damit die Invertierbarkeit von $f \in \operatorname{Iso}(U \otimes V; U \tilde{\otimes} V)$ mit Umkehrfunktion $\tilde{f} \in \operatorname{Iso}(U \tilde{\otimes} V; U \otimes V)$ und damit $U \otimes V \cong U \tilde{\otimes} V$ via f mit der behaupteten Transformation der Bilinearformen. (16 Punkte)

Aufgabe 4. 8 + 5 = 13 Punkte

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Zeigen Sie, dass wenn K algebraisch abgeschlossen ist und $\Lambda(f) = \{0\}$ ist, dann ist f nilpotent.

(b) Geben Sie ein Beispiel von V über $K = \mathbb{R}$ mit einem nicht nilpotenten f an, so dass $\Lambda(f) = \{0\}$.

Lösung.

(a) Ist K algebraisch abgeschlossen, dann zerfällt nach Definition das charakteristische Polynom χ_f über K in $\dim_K(V)$ Linearfaktoren. Zu jedem der Linearfaktoren der Form $t - \lambda_i$ ist $\lambda_i \in \Lambda(f)$, daher muss das Polynom durch $t^{\dim_K(V)}$ gegeben sein. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton annuliert das charakteristische Polynom f und damit gilt $f^{\dim_K(V)} = 0$, damit ist f nilpotent. (8 Punkte)

(b) Für $V = \mathbb{R}^3$ und f zu der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(also eine Matrix mit einem offensichtlichen Nulleigenvektor in der Basis und einem 2×2 Rotationsblock auf der Diagonalen) ist der einzige Eigenwert die 0 aber f nicht nilpotent. (5 Punkte)

Aufgabe 5. 14 Punkte

Es sei K ein Körper und $A \in K^{2\times 2}$ mit Spur $A = 0$. Zeigen Sie, dass A^2 ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Lösung.

Das charakteristische Polynom χ_A einer Matrix A aus $K^{2\times 2}$ ist ein normiertes Polynom vom Grad 2 der Form

$$\chi_A = t^2 - \mathrm{Spur}(A)t + \det(A) = t^2 + \det(A)$$

(siehe Satz 24.20) .

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton annuliert χ_A auch A, es gilt also

$$A^2 + \det(A)I = 0$$

und damit $A^2 = -\det(A)I$. (14 Punkte)

Aufgabe 6. 3 + 5 + 5 + 3 = 16 Punkte

Entscheiden und Begründen Sie, welche der unten stehenden rellen Matrizen

(a) in Diagonalform vorliegen,

(b) in Jordan-normalform vorliegen,

(c) in Frobenius-normalform vorliegen,

und erklären Sie, für welche von ihnen Sie nicht notwendigerweise alle Eigenwerte ablesen können.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung.

(a) In Diagonalform liegt offensichtlich nur Matrix A vor, alle anderen haben Nebendiagonaleinträge ungleich 0. (3 Punkte)

(b) In Jordannormalform liegt natürlich ebenfalls A vor, denn die Diagonalform ist eine Spezialsierung der Jordan-Normalform für den Fall, dass zur Matrix eine volle Basis aus Eigenwerten existiert.

Ebenfalls liegt B in Jordan-Normalform vor, denn die Matrix hat auf der Superdiagonalen Einträge aus 0 und 1 (alle sind 1) und diese koppeln gleiche Werte auf der Diagonalen. Die Matrix hat genau einen Jordanblock.

Die Matrix C liegt nicht in Jordan-Normalform vor, denn die Superdiagonale hat den Eintrag 2 (sogar mehrfach).

Die Matrix D liegt nicht in Jordan-Normalform vor, denn auf der Subdiagonalen finden sich Einträge ungleich Null. (5 Punkte)

(c) Die Matrix A liegt in Frobenius-Normalform vor, denn die Begleitmatrixblöcke auf der Diagonalen sind im Format 1×1 und stimmen alle überein und gehören damit zu den gleichen Linearfaktoren, welche sich also gegenseitig teilen.

Die Matrizen B und C haben keine Nulleinträge auf der Diagonalen aber Einträge ungleich Null neben der Diagonalen und liegen damit nicht in Frobeniusnormalform vor.

Die Matrix D besteht aus zwei Blockmatrizen auf der Diagonalen, die beide Begleitmatrizen sind, nämlich zu den Polynomen

$$t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1 = (t+1)^5 \qquad \text{und} \qquad t+1$$

sie liegt damit in Frobeniusnormalform vor, da $t+1$ offensichtlich $(t+1)^5$ teilt. Wer hier die Koeffizienten des Paskalschen-Dreiecks nicht erkennt kann auch einfach testen, ob -1 eine Nullstelle des ausfaktorisierten Polynoms ist. (5 Punkte)

(d) Da A und B in Jordannormalform vorliegen, sind alle Eigenwerte sofort an den Diagonaleinträgen ablesbar.

C liegt zwar nicht in Jordan-Normalform aber in oberer Dreiecksgestalt vor, wieder stehen die Eigenwerte also auf der Diagonalen.

D hat keine einfache Dreiecksgestalt, aber bei der Überprüfung der Frobenisu-Normalformgestalt haben wir eingesehen, dass das charakteristische Polynom in die Potenz eines einzelnen Linearfaktors zerfällt, damit ist der einzige Eigenwert klar -1. (3 Punkte)

Aufgabe 7. 8 + 8 = 16 Punkte

Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler, reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie:

(a) Der einzige γ-selbstadjungierte und nilpotente Endomorphismus auf V ist die Nullabbildung.

(b) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ γ-selbstadjungiert, dann ist $f \circ g$ genau dann γ-selbstadjungiert, wenn f und g kommutieren.

Lösung.

(a) Es sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und nilpotent. Aus dem Spektralsatz folgt, dass f diagonalisierbar ist, es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren $(v_1, \dots, v_n)$ zu Eigenwerten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Da f weiterhin nilpotent ist, ist $f^n = 0$ und daher ist für $i = 1, \dots, n$:

$$0 = 0(v_i) = f^n(v_i) = \lambda_i^n v_i$$

und damit $\lambda_i^n = 0$, also $\lambda_i = 0$ und damit $f = 0$. (8 Punkte)

(b) Auf Grund der γ-Selbstadjungiertheit gilt

$$\gamma(f \circ g(v), w) = \gamma(g(v), f(w)) = \gamma(v, g \circ f(w))$$

für alle $v, w \in V$ und damit die Aussage. (8 Punkte)