Vorlesungsskript
Lineare Algebra

Wintersemester 2023

Roland Herzog*

2023-10-10

*Interdisciplinary Center for Scientific Computing, Heidelberg University, 69120 Heidelberg, Germany (roland.herzog@iwr.uni-heidelberg.de, https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/team/roland-herzog).

Dieses Skript orientiert sich an früheren Vorlesungen von Jan Johannes und Alexander Schmidt (Universität Heidelberg).

Material für 27–29 Vorlesungen (Lineare Algebra I).

Kommentare und Korrekturen bitte an roland.herzog@iwr.uni-heidelberg.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1 Mathematische Grundlagen

Die **Algebra** (von arabisch الجبر, *al-ǧabr*, „das Zusammenfügen gebrochener Teile“, englisch: algebra) hat ihren Ursprung in der Beschreibung von Lösungsverfahren linearer und quadratischer Gleichungen. Heute versteht den Begriff Algebra deutlich weiter, es geht jedoch immer um Strukturen, Abbildungen zwischen Strukturen und die in ihnen geltenden „Rechen“regeln. Speziell die **lineare Algebra** (englisch: linear algebra) befasst sich mit „linearen Strukturen“, das sind vor allem Vektorräume, Abbildungen zwischen Vektorräumen und lineare Gleichungssysteme.

Wie andere Wissenschaften auch hat die Mathematik eine eigene Sprache, die man erlernen muss, um die Gegenstände dieser Wissenschaft zu verstehen und sich sachgerecht ausdrücken und argumentieren zu können. Das Herz der Mathematik bilden Beweise. Jede Aussage, jeder Lehrsatz muss bewiesen werden, d. h., durch logische Verknüpfungen aus den verwendeten Grundaxiomen und bereits bewiesenen Aussagen hergeleitet werden.

Eine streng formale, axiomatische Einführung der Logik und logischer Schlussweisen ist im Rahmen dieser Vorlesung leider nicht möglich. Diese kann später bei Interesse in weiterführenden Veranstaltungen zur Logik nachgeholt werden. Wir beschränken uns hier auf eine „naive“ (nicht-axiomatische) Einführung in die Logik.

§ 1 Aussagenlogik

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.1, Magnus u. a., 2023, Kapitel 1–14

Definition 1.1 (Aussage, Wahrheitswert)**.**

*Eine **Aussage** (englisch: statement) ist ein Satz (einer Sprache), dem eindeutig entweder der **Wahrheitswert wahr** (kurz: W oder $\top$, englisch: true, T) oder der Wahrheitswert **falsch** (kurz: F oder $\bot$, englisch: false, F) zugeordnet werden kann.*

Der Satz kann dabei der gewöhnlichen Sprache oder der mathematischen Sprache entstammen. Wir bezeichnen Aussagen in der Regel mit Großbuchstaben wie A, B usw.

Beispiel 1.2 (Aussagen und Nicht-Aussagen)**.**

(i) *A:* 9 *ist durch* 3 *teilbar.*
Dieses ist eine wahre Aussage.

(*ii*) *B: Die Hauptstadt von Frankreich ist London.*
Dieses ist eine falsche Aussage.

(*iii*) *C: München ist* 781 km *von Hamburg entfernt.*
Dieses ist keine Aussage, da der Satz zuviel Interpretationsspielraum lässt. Was ist mit „München" und „Hamburg" gemeint? Mit welcher Toleranz ist die Entfernungsangabe zu verstehen?

(*iv*) *D: Das Team des VfL Wolfsburg wird in der Saison 2023/24 deutscher Meister in der Frauen-Fußball-Bundesliga.*
Dieses ist eine Aussage, deren Wahrheitswert wir im Moment aber nicht kennen.

(*v*) *E: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.*
Dieses ist eine ebenfalls Aussage, deren Wahrheitswert wir zur Zeit nicht kennen.[1]

Ein grundlegendes Prinzip in der Mathematik ist es, aus bekannten Objekten durch Verknüpfung neue Objekte zu schaffen. In der Logik heißen diese Verknüpfungen **Junktoren** (englisch: logical operators, junction, lateinisch: iungere: verbinden, verknüpfen). Ein Junktor erschafft also aus einer oder aus mehreren Aussagen eine neue Aussage. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ergibt sich aus den Wahrheitswerten der miteinander verknüpften Aussagen. Wir definieren einen Junktor über seine **Wahrheitswerttabelle** (auch: **Wahrheitstafel**, englisch: truth table).

Definition 1.3 (Junktoren).

Im Folgenden seien A und B Aussagen. Wir definieren folgende wichtige ein- und zweistellige Junktoren.

(*i*) ***Negation*** *(**Verneinung**, englisch: negation)* $\neg$

*Die Operation $\neg A$ (sprich: „nicht A") heißt **Negation**. $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.*

A	$\neg A$
W	F
F	W

(*ii*) ***Konjunktion***[2] *(**Und-Verknüpfung**, englisch: conjunction)* $\wedge$

Die Aussage $A \wedge B$ (sprich: „A und B") ist dann wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten falsch.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

[1] siehe Primzahlzwillingsvermutung
[2] lateinisch: coniungere: verbinden

(*iii*) ***Disjunktion***[3] (***Oder-Verknüpfung***, *englisch: disjunction*) $\vee$

Die Aussage $A \vee B$ (sprich: „A oder B“) ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist, ansonsten falsch. Das „Oder“ ist also in einem nicht-ausschließenden Sinne gemeint.

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

(*iv*) ***Implikation***[4] (***Konditional***[5], ***Wenn-Dann-Verknüpfung***, *englisch: implication*) $\rightarrow$

*Die Aussage $A \rightarrow B$ ist über die nebenstehende Wahrheitswerttabelle definiert. Man benennt die Aussage auch als „A ist **hinreichend** für B“ (englisch: „A is sufficient for B“), „B ist **notwendig** für A“ (englisch: „B is necessary for A“), „A impliziert B“ (englisch: „A implies B“) oder „Wenn A, dann B“ (englisch: „If A, then B“). In einer Implikation $A \rightarrow B$ nennt man A auch das **Antezedens** (englisch: antecedent, lateinisch: antecedens: das Vorausgehende) und B das **Konsequens** (englisch: consequent, lateinisch: consequentis: folgerichtig).*

A	B	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

*Die Implikation behauptet keinerlei kausalen oder sonstigen inhaltlichen Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B. Man spricht auch von **materialer Implikation** (englisch: material implication). Die häufig anzutreffende Sprechweise „Wenn A, dann B“ ist daher problematisch, weil wir diese intuitiv als Kausalität oder zeitliche Nähe interpretieren.*

(*v*) ***Äquivalenz***[6] (***Bikonditional***, ***Genau-Dann-Wenn-Verkn.***, *englisch: equivalence*) $\leftrightarrow$

*Die Aussage $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn entweder A und B beide wahr oder beide falsch sind, ansonsten falsch. Man benennt die Aussage auch als „A ist **notwendig und hinreichend** für B“ (englisch: „A is necessary and sufficient for B“), „A ist äquivalent zu B“ (englisch: „A is equivalent to B“), „A genau dann, wenn B“ oder „A dann und nur dann, wenn B“ (englisch: „A if and only if B“, „A iff B“).*

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

*Auch hier gilt, dass die Äquivalenz nichts über einen eventuellen kausalen oder sonstigen inhaltlichen Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B aussagt. Man spricht auch von **materialer Äquivalenz** (englisch: material equivalence).*

Quizfrage 1.1: Wieviele verschiedene einstellige Junktoren gibt es? Wieviele zweistellige?

Quizfrage 1.2: Können Sie alle zweistelligen Junktoren aus den oben genannten, also aus $\neg$ sowie $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$, zusammensetzen? Reicht evtl. sogar eine Teilmenge davon aus?

Beispiel 1.4 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache[7]).
Die Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache in logische Aussagen ist nicht immer ganz einfach. Es folgen einige Beispiele jeweils mit einer oder mehreren gleichwertigen Symbolisierungen.

[3] lateinisch: disiungere: trennen, unterscheiden
[4] lateinisch: implicare: verwickeln
[5] lateinisch: conditio: Bedingung
[6] lateinisch: aequivalens: gleichwertig
[7] angelehnt an Beispiele aus Magnus u. a., 2023, Kapitel 5, genutzt unter der Lizenz CC-BY 4.0

(*i*) *Zum Burger servieren wir Pommes oder Salat.*
Das „oder“ ist hier im ausschließenden Sinne gemeint.

P: *Zum Burger servieren wir Pommes.*
S: *Zum Burger servieren wir Salat.*

- $(P \lor S) \land (\neg(P \land S))$
- $(P \land (\neg S)) \lor (S \land (\neg P))$

(*ii*) *Obwohl Barbara energisch ist, ist sie nicht sportlich.*

E: *Barbara ist energisch.*
S: *Barbara ist sportlich.*

- $E \land (\neg S)$

(*iii*) *Du wirst keine Suppe bekommen, aber dafür den Salat.*

S_1: *Du wirst Suppe bekommen.*
S_2: *Du wirst Salat bekommen.*

- $(\neg S_1) \land S_2$

(*iv*) *Du wirst Dich erkälten, es sei denn, Du trägst eine Jacke.*

J: *Du trägst eine Jacke.*
E: *Du wirst Dich erkälten.*

- $(\neg J) \to E$
- $J \lor E$

An den Beispielen sieht man, dass unter der formalen Symbolisierung Nuancen der Sprache zugunsten der Präzision verloren gehen.

Lemma 1.5 (Umschreibung von $\to$ und $\leftrightarrow$)**.**
Es seien A und B Aussagen.

(*i*) *Die Aussagen*

- $A \to B$
- $(\neg A) \lor B$
- $(\neg B) \to (\neg A)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

(*ii*) *Die Aussagen*

- $A \leftrightarrow B$
- $(A \to B) \land (B \to A)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

Beweis. Wir stellen die Wahrheitstafeln für die drei Aussagen in Aussage (*i*) auf:

A	B	$A \to B$	$(\neg A) \vee B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \to (\neg A)$
W	W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Der Beweis der Aussage (ii) ist Teil von Hausaufgabe 1.3. □

Da die Verknüpfung von Aussagen stets wieder auf Aussagen führt, können wir durch wiederholte Verknüpfung komplexe Aussagen aufbauen, wie etwa $(A \to D) \to ((B \vee C) \to (D \wedge C))$. Zur Vereinfachung der Notation vereinbaren wir folgende Bindungsregeln:

$$\neg \text{ bindet stärker als } \wedge \text{ bindet stärker als } \vee \text{ bindet stärker als } \to \text{ bindet stärker als } \leftrightarrow . \tag{1.1}$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} & (\neg A) \wedge B && \text{dasselbe wie} && \neg A \wedge B \\ \text{und} \quad & (\neg(A \wedge B)) \to (B \vee \neg B) && \text{dasselbe wie} && \neg(A \wedge B) \to B \vee \neg B. \end{aligned}$$

Es gilt jedoch, dass Klammern zur Verdeutlichung nicht schaden können. Statt $(\cdot)$ können auch $[\cdot]$ oder $\{\cdot\}$ verwendet werden.

Wir berechnen jetzt die Wahrheitstafeln einiger zusammengesetzter Aussagen.

Beispiel 1.6 (Wahrheitstafeln zusammengesetzter Aussagen)**.**

(i) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W
F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	W	F

Diese Wahrheitstafel ist offenbar dieselbe wie die von $A \vee B$.

(ii) $A \vee B \to B \wedge C$

A	B	C	$A \vee B$	$B \wedge C$	$A \vee B \to B \wedge C$
W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F
W	F	W	W	F	F
W	F	F	W	F	F
F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W
F	F	F	F	F	W

(*iii*) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

Die letzte Aussage $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ hat also immer den Wahrheitswert W, unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B. Eine solche Aussage nennt man **Tautologie**[8] (englisch: tautology) oder **logisches Gesetz**. Tautologien spielen eine entscheidende Rollen in mathematischen Beweisen, siehe § 3.

Definition 1.7 (logische Implikation, logische Äquivalenz).
Es seien A und B Aussagen.

(*i*) *Die Aussage B heißt eine **logische Implikation** (englisch: logical implication) der Aussage A, wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist. A heißt dann **Prämisse** (englisch: premise), und B heißt **Konklusion** (englisch: conclusion). Wir schreiben: $A \Rightarrow B$ und sagen: „A impliziert B“ oder „B folgt aus A“.*

(*ii*) *Die Aussagen A und B heißen **logisch äquivalent (zueinander)** (englisch: logically equivalent), wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. Wir schreiben: $A \Leftrightarrow B$ und sagen: „A ist äquivalent zu B“ oder „A und B sind (zueinander) äquivalent“.*

Beachte: Die logische Implikation und die logische Äquivalenz sind *Aussagen über Aussagen*. Sie sind von den Junktoren „Implikation“ (Konditional) und „Äquivalenz“ (Bikonditional) zu unterscheiden!

Wir vereinbaren, dass $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ noch schwächer binden als die Junktoren in (1.1).

Beispiel 1.8 (logische Implikationen und Äquivalenzen).

(*i*) *Die Aussage $(A \rightarrow B) \wedge A$ impliziert die Aussage B, kurz: $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$, denn $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ ist eine Tautologie:*

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

(*ii*) *Die Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind logisch äquivalent, kurz: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, denn $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ist eine Tautologie, wie in Beispiel 1.6 gerade schon gezeigt wurde.*

Satz 1.9 (logische Implikationen und Äquivalenzen).
Es seien A, B und C Aussagen. Es gelten die folgenden Implikationen und Äquivalenzen.

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A \qquad \text{doppelte Verneinung[9]} \tag{1.2}$$

$$A \Rightarrow \top \qquad \text{„Aus Beliebigem folgt Wahres.“[10]} \tag{1.3a}$$

[8] altgriechisch: *ταυτο*: dasselbe

$$\bot \quad \Rightarrow \quad A \qquad \text{„Aus Falschem folgt Beliebiges.“}^{11} \tag{1.3b}$$

$$A \land A \quad \Leftrightarrow \quad A \qquad \textit{Idempotenz}^{12} \tag{1.4a}$$
$$A \lor A \quad \Leftrightarrow \quad A \qquad \textit{Idempotenz} \tag{1.4b}$$

$$A \land \top \quad \Leftrightarrow \quad A \qquad \textit{Neutralität}^{13} \tag{1.5a}$$
$$A \lor \bot \quad \Leftrightarrow \quad A \qquad \textit{Neutralität} \tag{1.5b}$$

$$A \land \bot \quad \Leftrightarrow \quad \bot \qquad \textit{Absorption}^{14} \tag{1.6a}$$
$$A \lor \top \quad \Leftrightarrow \quad \top \qquad \textit{Absorption} \tag{1.6b}$$

$$A \land \neg A \quad \Leftrightarrow \quad \bot \qquad \textit{Komplementarität}^{15} \tag{1.7a}$$
$$A \lor \neg A \quad \Leftrightarrow \quad \top \qquad \textit{Komplementarität}^{16} \tag{1.7b}$$

$$A \land B \quad \Leftrightarrow \quad B \land A \qquad \textit{Kommutativität von } \land^{17} \tag{1.8a}$$
$$A \lor B \quad \Leftrightarrow \quad B \lor A \qquad \textit{Kommutativität von } \lor \tag{1.8b}$$

$$(A \lor B) \lor C \quad \Leftrightarrow \quad A \lor (B \lor C) \qquad \textit{Assoziativität von } \lor^{18} \tag{1.9a}$$
$$(A \land B) \land C \quad \Leftrightarrow \quad A \land (B \land C) \qquad \textit{Assoziativität von } \land \tag{1.9b}$$

$$\neg(A \land B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \lor \neg B \qquad \textit{De Morgansches Gesetz}^{19} \tag{1.10a}$$
$$\neg(A \lor B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \land \neg B \qquad \textit{De Morgansches Gesetz} \tag{1.10b}$$

$$A \land (B \lor C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \land B) \lor (A \land C) \qquad \textit{Distributivität}^{20} \tag{1.11a}$$
$$A \lor (B \land C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \lor B) \land (A \lor C) \qquad \textit{Distributivität} \tag{1.11b}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Aufstellen der Wahrheitstafeln und wird hier nicht ausgeführt. □

§ 2 Prädikatenlogik

Literatur: Magnus u. a., 2023, Kapitel 22–39

Die Aussagenlogik reicht für die Bedürfnisse der Mathematik nicht aus. Beispielsweise lässt sich die Aussage „Wenn n eine gerade ganze Zahl ist, dann ist auch n^2 eine gerade ganze Zahl.“ innerhalb der Aussagenlogik nicht wie erforderlich symbolisieren. Die Schwierigkeit ist, dass wir in der Aussagenlogik

[9] lateinisch: duplex negatio affirmat
[10] lateinisch: verum ex quolibet
[11] lateinisch: ex falso quodlibet
[12] englisch: idempotence
[13] englisch: neutrality
[14] englisch: absorption
[15] englisch: complementarity
[16] Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, lateinisch: tertium non datur
[17] englisch: commutativity, lateinisch: commutare: tauschen, vertauschen
[18] englisch: associativity, lateinisch: associare: verbinden, beigesellen
[19] englisch: De Morgan's law
[20] englisch: distributivity, lateinisch: distribuere: verteilen, aufteilen

keine Aussagen mit Variablen zur Verfügung haben. Wir benötigen dazu die **Prädikatenlogik**[21], eine Erweiterung der Aussagenlogik. In der Prädikatenlogik ist es möglich, eine Aussage von dem Gegenstand, über den sie gemacht wird, zu trennen. Neben den schon bekannten Junktoren verwendet die Prädikatenlogik

- **Aussageformen** (englisch: statement) oder **Prädikate** (englisch: predicate), das sind sprachliche Gebilde mit Variablen (Leerstellen), die nach Einsetzen der Variablen in Aussagen übergehen.

  Beispiele:

  $$\begin{aligned} A(x) &: x \text{ wohnt in Aachen.} \\ Z(x) &: x \text{ ist eine gerade ganze Zahl.} \\ G(x,y) &: x \text{ ist mindestens so groß wie } y. \end{aligned}$$

  Die Anzahl der Variablen einer Aussageform heißt deren **Stelligkeit** (englisch: arity).

- **Quantoren** (englisch: quantifier), und zwar

  $\forall$ für alle (**Allquantor**, englisch: universal quantifier),
  $\exists$ es existiert (mindestens) ein (**Existenzquantor**, englisch: existential quantifier),
  $\exists!$ es existiert genau ein (**Eindeutigkeitsquantor**, englisch: uniqueness quantifier).

Zu jedem Quantor geben wir den **Grundbereich** (auch: **Individuenbereich**, **Diskursuniversum**, **Domäne**, englisch: universe of discourse, domain of discourse) an. In der Regel nimmt man an, dass der Grundbereich nicht leer ist, um gewisse Komplikationen auszuschließen. Der Grundbereich ist wichtig und beeinflusst den Wahrheitswert einer quantorisierten Aussage:

$\forall x \in \mathbb{N}\ (x \geqslant 0)$	„Alle natürlichen Zahlen sind nichtnegativ.“	(wahre Aussage)
$\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geqslant 0)$	„Alle reellen Zahlen sind nichtnegativ.“	(falsche Aussage)

Beispiel 2.1 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache mit Quantoren).
Wir betrachten die Aussageformen

$$\begin{aligned} E(x) &: x \textit{ hat } 100\,000 \textit{ oder mehr Einwohner} \\ S(x) &: x \textit{ ist eine Stadt} \end{aligned}$$

mit dem Grundbereich „Menge aller Orte in Deutschland“. Dann können wir die folgenden Aussagen wie angegeben symbolisieren:

Es gibt mindestens eine Stadt in Deutschland, die 100 000 *oder mehr Einwohner hat.*
$\exists x\ (E(x) \land S(x))$

Es gibt genau einen Ort in Deutschland, der 100 000 *oder mehr Einwohner hat, aber keine Stadt ist.*
$\exists! x\ (E(x) \land \neg S(x))$

Alle Städte in Deutschland haben 100 000 *oder mehr Einwohner.*
$\forall x\ (S(x) \to E(x))$

[21] genauer: Prädikatenlogik erster Stufe, englisch: first order logic

Keine Stadt in Deutschland hat 100 000 *oder mehr Einwohner.*
$\neg\exists x\ (E(x) \wedge S(x))$

Man sagt, dass die Variable einer Aussageform durch ihren Quantor **gebunden** (englisch: bound variable) wird. Auf den Namen der Variablen kommt es dabei übrigens nicht an, es sind also $\exists x\ (E(x) \wedge S(x))$ und $\exists y\ (E(y) \wedge S(y))$ äquivalente Aussagen.

Besonders mehrstellige Aussageformen spielen in vielen mathematischen Aussagen eine große Rolle. Die Reihenfolge verschiedener Quantoren ist dabei wichtig! Unterscheide zum Beispiel (siehe Vorlesung *Analysis*)

Die Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist stetig:
$$\forall x \in (a,b)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in (a,b)\ \underbrace{\big(|x-y| < \delta \to |f(x)-f(y)| < \varepsilon\big)}_{\text{vierstellige Aussageform}}.$$

Die Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a,b)\ \forall y \in (a,b)\ \big(|x-y| < \delta \to |f(x)-f(y)| < \varepsilon\big).$$

Für Aussagen mit Quantoren gelten folgende Regeln (ohne Beweis).

Satz 2.2 (logische Implikationen und Äquivalenzen von Aussagen mit Quantoren)**.**

Es seien A, B einstellige Aussageformen mit gemeinsamem Grundbereich und C eine zweistellige Aussageform. Es gelten die folgenden Implikationen und Äquivalenzen.

$\neg(\forall x\ A(x))$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\ (\neg A(x))$	*Negation des Allquantors*	(2.1a)
$\neg(\exists x\ A(x))$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\ (\neg A(x))$	*Negation des Existenzquantors*	(2.1b)
$\forall x\ \forall y\ C(x,y)$	$\Leftrightarrow$	$\forall y\ \forall x\ C(x,y)$	***Kommutativität gleicher Quantoren***	(2.2a)
$\exists x\ \exists y\ C(x,y)$	$\Leftrightarrow$	$\exists y\ \exists x\ C(x,y)$	***Kommutativität gleicher Quantoren***	(2.3a)
$\forall x\ (A(x) \wedge B(x))$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x)$	***Distributivität***	(2.4a)
$\exists x\ (A(x) \vee B(x))$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x)$	***Distributivität***	(2.4b)
$\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x)$	$\Rightarrow$	$\forall x\ (A(x) \vee B(x))$		(2.5a)
$\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$	$\Rightarrow$	$\exists x\ A(x) \wedge \exists x\ B(x)$		(2.5b)
$\forall x\ (A(x) \to B(x))$	$\Rightarrow$	$\forall x\ A(x) \to \forall x\ B(x)$		(2.6a)
$\exists x\ (A(x) \to B(x))$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\ A(x) \to \exists x\ B(x)$		(2.6b)

Auf https://de.wikipedia.org/wiki/Prädikatenlogik#Quantoren finden sich schöne Veranschaulichungen wahrer Aussagen mit zweistelligen Aussageformen und verschiedenen Quantoren.

§ 3 Beweismuster

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.1, Magnus u. a., 2023, Kapitel 15–21

In einem Beweis versuchen wir in der Regel, für gegebene Aussagen A, B die Implikation $A \Rightarrow B$ nachzuweisen. Das heißt, wir müssen nachweisen, dass $A \to B$ eine Tautologie ist. Meistens besteht die Prämisse selbst aus einer Konjunktion (Und-Verknüpfung) mehrerer einzelner Prämissen. Nicht alle Prämissen werden in der Formulierung eines mathematischen Satzes explizit genannt. Beispielsweise wird man die als wahr geltenden Grundannahmen (Axiome) über die reellen Zahlen nicht jedes Mal explizit erwähnen.

Ein Beweis wird oft in viele kleine Schritte zerlegt. Das Aufstellen einer Wahrheitswerttabelle ist nicht zielführend. Vielmehr werden wir Schlussregeln anwenden, die auf Tautologien beruhen. Solche Tautologien haben wir in Satz 1.9 und Satz 2.2 bereits aufgeführt. Dazu kommen die weiteren Tautologien

$$
\begin{aligned}
(A \to B) \land A &\quad\Rightarrow\quad B && \textbf{modus ponendo ponens}, && \text{(3.1a)}\\
(A \to B) \land \neg B &\quad\Rightarrow\quad \neg A && \textbf{modus tollendo tollens}, && \text{(3.1b)}\\
(A \to \neg B) \land A &\quad\Rightarrow\quad \neg B && \textbf{modus ponendo tollens}^{22}, && \text{(3.1c)}\\
(\neg A \to B) \land \neg A &\quad\Rightarrow\quad B && \textbf{modus tollendo ponens}^{23}, && \text{(3.1d)}
\end{aligned}
$$

$$
(A \to B) \land (B \to C) \quad\Rightarrow\quad (A \to C) \qquad \textbf{Kettenschluss} \text{ (englisch: chain inference).} \tag{3.2}
$$

Quizfrage 3.1: Können Sie einfache Beispiele in Alltagssprache für die Argumentation gemäß der vier Argumentationsmuster in (3.1a)–(3.1d) angeben?

Folgende Beweismuster für Implikationen $A \Rightarrow B$ werden häufig verwendet:

(1) Beim **direkten Beweis** (englisch: direct proof) wird $A \Rightarrow B$, typischerweise unter Verwendung von Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen, direkt mit Hilfe von Schlussregeln hergeleitet.

(2) Beim **indirekten Beweis** oder **Beweis durch Kontraposition** (englisch: indirect proof, proof by contrapositive) nutzen wir die Äquivalenz $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ aus. Wir führen also einen direkten Beweis für $\neg B \Rightarrow \neg A$.

(3) Beim **Widerspruchsbeweis** (englisch: proof by contradiction, lateinisch: reductio ad adsurdum: Zurückführung auf das Sinnlose) nutzen wir die Äquivalenz $(A \to B) \Leftrightarrow (A \land \neg B) \to \bot$ aus. Dazu nehmen wir die Aussage A als wahr und die Aussage B als falsch an und zeigen, dass dann $\bot$ folgt.

(4) Beim **Beweis durch Fallunterscheidung** (englisch: proof by distinction of cases) nutzen wir die Äquivalenz $(A \land C \to B) \land (A \land \neg C \to B) \Leftrightarrow A \to B$. Dabei ist C irgendeine weitere Aussage. Wir nehmen also zunächst die Aussagen A und C als wahr an und zeigen, dass dann auch die Aussage B wahr ist. Anschließend nehmen wir die Aussage A weiterhin als wahr aber die Aussage C als falsch an und zeigen, dass dann wiederum die Aussage B wahr ist.

Beispiel 3.1 (verschiedene Beweismuster)**.**

[22] Der modus ponendo tollens wird häufig als $\neg(A \land B) \land A \Rightarrow \neg B$ geschrieben.
[23] Der modus tollendo ponens wird häufig als $(A \lor B) \land \neg A \Rightarrow B$ geschrieben.

(1) ***direkter Beweis***

Behauptung: Für natürliche Zahlen m, n gelte $m^2 < n^2$, dann gilt auch $m < n$.

Wir symbolisieren die zugehörigen Aussagen über zweistellige Aussageformen:

$$A(m,n) : m^2 < n^2$$
$$B(m,n) : m < n$$

und verwenden als Grundbereich für beide Variablen in beiden Aussageformen die Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{lll} & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (A(m,n)) & \\ \Rightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (m^2 < n^2) & \textit{nach Definition von } A \\ \Rightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (0 < n^2 - m^2) & \textit{nach Subtraktion von } m^2 \\ \Rightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (0 < (n-m)(n+m)) & \textit{nach Rechenregeln in } \mathbb{N} \\ \Rightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (0 < n-m) & \textit{da } (n+m) > 0 \textit{ und nach Regeln von } < \textit{ in } \mathbb{N} \\ \Rightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (m < n) & \textit{da } (n+m) > 0 \textit{ und nach Regeln von } < \textit{ in } \mathbb{N} \\ \Rightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (B(m,n)) & \textit{nach Definition von } B \end{array}$$

Ab sofort werden wir solche Beweise als Fließtext schreiben, etwa wie folgt: „Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m^2 < n^2$. Dann gilt auch $0 < n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$. Die Division durch die positive Zahl $n+m$ ergibt $0 < n - m$, also auch $m < n$, was zu zeigen war.“

Die konkrete Benennung der verwendeten Aussageformen A und B war für den Beweis auch nicht wesentlich, sodass wir im Folgenden darauf verzichten können.

(2) ***Beweis durch Kontraposition***

Behauptung: Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ gilt: Wenn $4^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist notwendig n ungerade.

Kontraposition der Behauptung: Für natürliche Zahlen n gilt: Wenn n gerade ist, dann ist $4^n - 1$ keine Primzahl.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, also gilt $n = 2k$ für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $4^n - 1 = 4^{2k} - 1 = (4^k - 1)(4^k + 1)$. Beide Faktoren sind > 1, d. h., $4^n - 1$ ist keine Primzahl.

(3) ***Widerspruchsbeweis***[24]

Behauptung: Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}$.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$. Durch Quadrieren folgt dann $(\sin x_0)^2 + (\cos x_0)^2 + 2\,(\sin x_0)(\cos x_0) = \frac{9}{4}$. Wegen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ und $2\,(\sin x)(\cos x) = \sin(2\,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (insbesondere auch für x_0) folgt also $\sin(2\,x_0) = \frac{5}{4} > 1$. Jedoch nimmt die $\sin$-Funktion nur Werte zwischen -1 und 1 an.

Weitere klassische Aussagen, die typischerweise mit Widerspruchsbeweisen gezeigt werden, sind „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ und „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“.

[24] Dieses Beispiel ist Thiele, 1979 entnommen.

(4) ***Beweis durch Fallunterscheidung***

Behauptung: Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

***Fall** 1: n ist ungerade.*

In diesem Fall gilt also $n = 2\,k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 + n = (2\,k + 1)^2 + 2\,k + 1 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 + 2\,k + 1 = 4\,k^2 + 6\,k + 2,$$

also eine gerade Zahl.

***Fall** 2: n ist gerade.*

In diesem Fall gilt also $n = 2\,k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 + n = (2\,k)^2 + 2\,k = 4\,k^2 + 2\,k,$$

also wiederum eine gerade Zahl.

Das Ende eines Beweises wird oft mit der Abkürzung **q.e.d.** (lateinisch: quod erat demonstrandum: was zu zeigen war, englisch: what was to be proved) oder mit dem Symbol □ markiert.

Andere Sätze sind nicht als Implikation formuliert, sondern in Form mehrerer äquivalenter Aussagen $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n$. In diesem Fall verwenden wir häufig einen

(5) **Beweis durch Ringschluss** (englisch: closed chain inference). Bei diesem zeigen wir nacheinander die Implikationen $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$ usw. bis $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ und $A_n \Rightarrow A_1$, was dann wiederum die gewünschten Äquivalenzen zur Folge hat. Das erfordert n Beweisschritte. Wir können sogar allgemeiner solange verschiedene Implikationen $A_i \Rightarrow A_j$ zeigen, bis wir mittels Kettenschluss von jeder der beteiligten Aussagen zu jeder anderen Aussage gelangen können. Die Anzahl der zu zeigenden Implikationen beträgt aber mindestens n.

Quizfrage 3.2: Wieviele Implikationen wären zu zeigen, wenn man die Äquivalenz der Aussagen A_i und A_j für $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ paarweise zeigen würde?

Schließlich betrachten wir noch den

(6) **Beweis durch vollständige Induktion** (englisch: proof by induction), der dann verwendet werden kann, wenn wir die Wahrheit einer Aussageform $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ab einem gewissen Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ zeigen wollen, also für $n \geqslant n_0$. In diesem Fall zeigen wir am **Induktionsanfang** (englisch: base case) die Wahrheit der Aussage $A(n_0)$. Oft wird der Induktionsanfang bei $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$ gesetzt.

Im **Induktionsschritt** (englisch: induction step) wird $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ gezeigt. Dabei heißt $A(n)$ die **Induktionsannahme** (englisch: induction hypothesis). Bei Bedarf kann sogar auf alle vorgehenden Aussagen $A(1), \ldots, A(n)$ zurückgegriffen werden, also $A(1) \land \cdots \land A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt werden.

Ein schönes Beispiel für einen fehlerhaft ausgeführten Induktionsbeweis ist das Pferde-Paradoxon, bei dem „bewiesen“ wird, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben.

Beispiel 3.2 (vollständige Induktion).
Behauptung: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist gleich $\frac{1}{2}n\,(n+1)$.

$$A(n) : \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n\,(n+1).$$

Induktionsanfang bei $n_0 = 1$*:* $A(1)$ *lautet:* $\sum_{j=1}^{1} j = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$, *was eine wahre Aussage ist. Wir zeigen nun im Induktionsschritt, dass* $A(n)$ *auch* $A(n+1)$ *impliziert:*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} j &= n+1+\sum_{j=1}^{n} j && \textit{wegen der Assoziativität der Addition} \\
&= n+1+\frac{1}{2}n\,(n+1) && \textit{nach Induktionsannahme, dass } A(n) \textit{ wahr ist} \\
&= (n+1)\left[1+\frac{1}{2}n\right] && \textit{wegen des Distributivgesetzes für Addition und Multiplikation} \\
&= (n+1)\left[\frac{n+2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(n+1)\,(n+2),
\end{aligned}$$

was $A(n+1)$ *entspricht.*

Ende der Woche 1

§ 4 Mengenlehre

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.2

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre, hat 1895 folgenden Versuch der Definition einer Menge angegeben:

> „Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung X von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von X genannt werden) zu einem Ganzen."

Diese ursprüngliche Definition hat allerdings Schwächen, wie wir gleich noch sehen werden.

Wir bezeichnen Mengen oft mit Großbuchstaben. Ist X eine Menge (englisch: set) und x ein Element (englisch: element) von X, so notieren wir diese Beziehung als $x \in X$ (seltener auch $X \ni x$) und lesen „x ist Element von X" oder kurz „x in X" oder auch „X enthält x". Das Symbol $x \notin X$ (oder $X \not\ni x$) drückt aus, dass x *kein* Element von X ist.

Mengen sind vollständig durch ihre Elemente bestimmt. Zwei Mengen X und Y sind also genau dann **gleich** (englisch: equality of sets), wenn sie dieselben Elemente enthalten. In Symbolen:

$$X = Y \quad \text{ist definiert als die Wahrheit der Aussage} \quad \forall x \in X\ (x \in Y)\ \wedge\ \forall y \in Y\ (y \in X).$$

Mengen können beispielsweise durch Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern $\{\}$ angegeben werden, etwa

$$X := \{2, 3, 5\}.$$

Da Mengen nur aus „wohlunterschiedenen" Elementen bestehen und es auf die Reihenfolge nicht ankommt, könnten wir dieselbe Menge auch als

$$X := \{5, 2, 3, 2\}$$

beschreiben. Wichtige Mengen sind die **Zahlbereiche** (englisch: number systems)

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der **natürlichen Zahlen** (englisch: natural numbers),
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der **natürlichen Zahlen mit Null**,
$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	Menge der **ganzen Zahlen** (englisch: integer numbers),
$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$	Menge der **rationalen Zahlen** (englisch: rational numbers),
$\mathbb{R}$	Menge der **reellen Zahlen** (englisch: real numbers),
$\mathbb{C} := \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	Menge der **komplexen Zahlen** (englisch: complex numbers),

die hier nur informell definiert werden.

Eine weitere Möglichkeit, Mengen anzugeben, besteht darin, Elemente anhand bestimmter Eigenschaften zu sammeln. Es sei dazu A eine Aussageform mit Grundbereich X, der eine Menge sein soll. Dann können wir

$$Y := \{x \in X \mid A(x)\} \tag{4.1}$$

betrachten, bestehend aus den Elementen von X, für die $A(x)$ eine wahre Aussage ist. Diese Konstruktion heißt **Mengenkomprehension** (englisch: set comprehension).

Hier erkennt man ein Problem der sehr freien Definition einer Menge nach Cantor. Sie lässt es zu, X als die Menge aller Mengen zu definieren. Wählen wir dann $A(x)$ als die Aussageform „enthält sich selbst", so definiert

$$R := \{x \in X \mid x \notin x\}$$

also die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten". Stellen wir jetzt die Frage, ob R sich selbst enthält, so erkennen wir das Problem:

- Falls R sich selbst enthält ($R \in R$), dann liegt das daran, dass R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ erfüllt.

- Falls R sich nicht selbst enthält ($R \notin R$), dann erfüllt R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ nicht, also gilt $R \in R$.

In Kurzform erhalten wir den Widerspruch $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Dieser Widerspruch ist als **Russell-Paradoxon** (englisch: Russell's paradox) oder **Russell-Antinomie** der „naiven" Cantorschen Mengenlehre bekannt geworden, entdeckt 1901 von Russell und unabhängig etwa zeitgleich von Zermelo.[25]

Die Auflösung in der modernen, axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel (**ZF-Mengenlehre**) (englisch: ZF set theory) besteht darin, den Mengenbegriff geeignet einzuschränken, sodass Konstruktionen wie die „Menge aller Mengen" nicht mehr möglich sind. In dieser Vorlesung können wir die zugehörigen Axiome[26] nicht behandeln und verweisen auf spätere Spezialveranstaltungen.

[25] Eine bekannte andere Formulierung des Russell-Paradoxons ist die folgende. In einem Dorf lebt ein (männlicher) Barbier, der alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Dorfbarbier sich selbst?

[26] Bei Interesse können Sie sich aber unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre#Die_Axiome_von_ZF_und_ZFC` einen Eindruck verschaffen.

Wir weisen aber darauf hin, dass die Mengenkomprehension (4.1) in Form des sogenannten Aussonderungsaxioms als Konstruktionsprinzip von Mengen weiterhin vorkommt. Wesentlich ist nur eben, dass der Grundbereich X der Aussageform A eine Menge im Sinne der ZF-Axiome sein muss.[27]

Intervalle lassen sich beispielsweise über Mengenkomprehension definieren:

Beispiel 4.1 (Mengenkomprehension).
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} && \textbf{abgeschlossenes Intervall}^{28}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} && \textbf{links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall}^{29}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} && \textbf{links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall}^{30}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \textbf{offenes Intervall}^{31}, \\
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} && \textbf{rechtsseitig unendliches abgeschlossenes Intervall}^{32}, \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && \textbf{rechtsseitig unendliches offenes Intervall}^{33}, \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\} && \textbf{linksseitig unendliches abgeschlossenes Intervall}^{34}, \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \textbf{linksseitig unendliches offenes Intervall}^{35}, \\
(-\infty, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \top\} = \mathbb{R} && \textbf{beidseitig unendliches Intervall}^{36}.
\end{aligned}$$

*Dabei ist $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ eine gebräuchliche Kurzschreibweise für $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \ \land \ x \leqslant b\}$. Die Intervalle der Form $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) heißen **endliche Intervalle** (englisch: finite intervals). Diese sind leer, wenn $b < a$ bzw. $b \leqslant a$ gilt. Die Bedeutung der Eigenschaften **offen** (englisch: open) und **abgeschlossen** (englisch: closed) wird in der Vorlesung* Analysis *behandelt.*

Wir definieren für $a, b \in \mathbb{Z}$ auch

$$[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbb{Z} \qquad \textbf{ganzzahliges Intervall} \text{ (englisch: integer interval).}$$

Definition 4.2 (Teilmenge, Obermenge).
Für Mengen A und B definieren wir:

(i) *A ist eine **Teilmenge** (englisch: subset) von B, kurz: $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, kurz: $\forall a \in A \ (a \in B)$. In diesem Fall sagen wir auch, B sei eine **Obermenge** (englisch: superset) von A, und schreiben $B \supseteq A$.*

(ii) *A ist eine **echte Teilmenge** (englisch: proper subset) von B, kurz: $A \subsetneq B$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch, B sei eine **echte Obermenge** (englisch: proper superset) von A, und schreiben $B \supsetneq A$.*

[27] Ist der Grundbereich keine Menge, so landet man beim Begriff der **Klasse** (englisch: class), siehe etwa Deiser, 2022a, Kapitel 3. Ein wichtiges Beispiel ist die **Klasse aller Mengen** (englisch: class of all sets).
[28] englisch: closed interval
[29] englisch: left-open, right-closed interval
[30] englisch: left-closed, right-open interval
[31] englisch: open interval. Bei der Notation (a, b) für offene Intervalle besteht eine Verwechslungsgefahr mit den Elementen (a, b) des kartesischen Produkts von zwei Mengen, siehe Definition 4.8.
[32] englisch: unbounded above, closed interval
[33] englisch: unbounded above, open interval
[34] englisch: unbounded below, closed interval
[35] englisch: unbounded below, open interval
[36] englisch: unbounded above and below interval

Die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ zwischen Mengen heißt auch ***Inklusion*** *(englisch: inclusion).*[37]

Beispielsweise erzeugt die Mengenkomprehension (4.1) immer eine Teilmenge $Y \subseteq X$. Außerdem gelten die echten Inklusionen

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Quizfrage 4.1: Wie kann man sich davon überzeugen, dass die Inklusionen echt sind?

In der axiomatischen Mengenlehre gibt es genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (englisch: empty set) $\emptyset$.

Definition 4.3 (Schnitt, disjunkte Mengen, Vereinigung, Differenz, symmetrische Differenz)**.**

(i) *Es sei $\mathcal{U}$ eine nichtleere Menge von Mengen. Dann heißt die Menge*

$$\bigcap \mathcal{U} := \big\{x \,\big|\, \forall U \in \mathcal{U} \; (x \in U)\big\} \tag{4.2}$$

die ***Schnittmenge****, der* ***Durchschnitt*** *oder* ***Schnitt*** *(englisch: intersection) von $\mathcal{U}$. Sind die Elemente von $\mathcal{U}$ über eine nichtleere Indexmenge I indiziert, gilt also $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, so schreiben wir auch*

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \big\{x \,\big|\, \forall i \in I \; (x \in U_i)\big\}. \tag{4.3}$$

Besteht speziell $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ aus nur zwei Elementen, so schreiben wir auch

$$U_1 \cap U_2 := \big\{x \,\big|\, x \in U_1 \;\wedge\; x \in U_2\big\}. \tag{4.4}$$

Gilt $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ bzw. $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset$ bzw. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so heißen die Elemente von $\mathcal{U}$ bzw. die Mengen U_i bzw. die Mengen U_1 und U_2 ***disjunkt*** *(englisch: disjoint).*

(ii) *Es sei $\mathcal{U}$ eine (möglicherweise leere) Menge von Mengen. Dann heißt die Menge*

$$\bigcup \mathcal{U} := \big\{x \,\big|\, \exists U \in \mathcal{U} \; (x \in U)\big\} \tag{4.5}$$

die ***Vereinigungmenge*** *oder die* ***Vereinigung*** *(englisch: union) von $\mathcal{U}$. Sind die Elemente von $\mathcal{U}$ über eine Indexmenge I indiziert, gilt also $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, so schreiben wir auch*

$$\bigcup_{i \in I} U_i := \big\{x \,\big|\, \exists i \in I \; (x \in U_i)\big\}. \tag{4.6}$$

Besteht speziell $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ aus nur zwei Elementen, so schreiben wir auch

$$U_1 \cup U_2 := \big\{x \,\big|\, x \in U_1 \;\vee\; x \in U_2\big\}. \tag{4.7}$$

Definition 4.4 (Differenz, symmetrische Differenz, Komplement)**.**
Für Mengen X und Y definieren wir

(i) *die* ***Differenzmenge*** *(englisch: set difference) von Y in X*

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}, \tag{4.8}$$

kurz auch als „X ohne Y“ bezeichnet.

[37] lateinisch: includere: einschließen

(*ii*) *die* ***symmetrische Differenz*** *(englisch: symmetric difference) von X und Y*

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X). \tag{4.9}$$

Ist weiter X irgendeine Menge und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so definieren wir

(*iii*) *das* ***Komplement*** *(englisch: complement) von A in X*

$$A^c := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}. \tag{4.10}$$

Da die Menge X im Symbol A^c nicht angegeben wird, muss sie dabei aus dem Zusammenhang klar sein.

Quizfrage 4.2: Was sind $X \triangle X$ und $X \triangle \emptyset$?

Lemma 4.5 (Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung).
Es seien X, Y und Z Mengen. Dann gilt:

$$X \cap Y = Y \cap X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cap \tag{4.11a}$$
$$X \cup Y = Y \cup X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cup \tag{4.11b}$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cap \tag{4.12a}$$
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cup \tag{4.12b}$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \qquad \textbf{Distributivität} \tag{4.13a}$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \qquad \textbf{Distributivität} \tag{4.13b}$$

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y) \tag{4.14}$$

$$X \cap Y = X \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \tag{4.15a}$$
$$X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \tag{4.15b}$$

Sind A und B Teilmengen einer Menge X, bzgl. der wir das Komplement nehmen, so gilt weiter:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \textbf{De Morgansches Gesetz} \tag{4.16a}$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \textbf{De Morgansches Gesetz} \tag{4.16b}$$

$$(A^c)^c = A \qquad \text{Komplementbildung ist } \textbf{involutorisch}^{38} \tag{4.17}$$

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad B^c \subseteq A^c \tag{4.18}$$

Beweis. Der Beweis kann durch Ausnutzung von $X = Y \Leftrightarrow \forall x\ (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$ und $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x\ (x \in X \rightarrow x \in Y)$ auf Satz 1.9 zurückgeführt werden. Die Details werden hier nicht ausgeführt. □

Zur Vereinfachung der Notation vereinbaren wir auch hier wieder Bindungsregeln:

$$\cdot^c \text{ bindet stärker als } \setminus \text{ bindet stärker als } \cap \text{ bindet stärker als } \cup, \tag{4.19}$$

wodurch wir beispielsweise das erste Distributivgesetz auch als $X \cap (Y \cup Z) = X \cap Y \cup X \cap Z$ schreiben könnten.

[38] auch: selbst-invers, englisch: involutory, self-inverse

Definition 4.6 (Potenzmenge)**.**
Für jede Menge A heißt

$$\mathcal{P}(A) \coloneqq \{B \,|\, B \subseteq A\} \tag{4.20}$$

die ***Potenzmenge*** *(englisch: power set) von A.*

In der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel gibt es das Potenzmengenaxiom, das garantiert, dass jede Menge eine Potenzmenge besitzt.

Beispiel 4.7 (Potenzmenge)**.**

(i) *Für $A = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.*

(ii) *Für $A = \{a\}$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.*

(iii) *Für $A = \{a, b\}$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.*

Definition 4.8 (kartesisches Produkt endlich vieler Mengen)**.**

(i) *Für Mengen A und B definieren wir das* ***kartesische Produkt*** *(englisch: Cartesian product) oder* ***Kreuzprodukt*** *(englisch: cross product)*

$$A \times B \coloneqq \{(a, b) \,|\, a \in A \ \wedge b \in B\}. \tag{4.21}$$

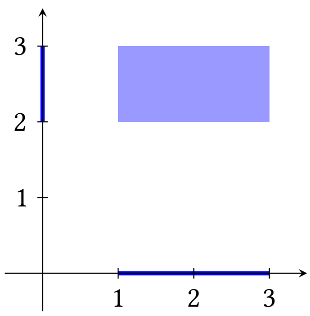
Die Elemente des kartesischen Produkts heißen ***geordnete Paare*** *(englisch: ordered pairs) oder einfach* ***Paare*** *(englisch: pairs) (a, b).*

(ii) *Analog können wir auch das kartesische Produkt von mehr als zwei Mengen definieren, etwa $A \times B \times C$, dessen Elemente* ***Tripel*** *(englisch: triplets) (a, b, c) sind. Allgemeiner heißen die Elemente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des Produkts $\bigtimes_{i=1}^n A_i$ von $n \geqslant 2$ Mengen* ***n-Tupel*** *(englisch: n-tuples). Wir schreiben $A^2 = A \times A$ und allgemeiner $A^n = \bigtimes_{i=1}^n A$ für das kartesische Produkt einer Menge A mit sich selbst.*

Beispiel 4.9 (kartesisches Produkt)**.**

(i) *Ist $A = \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\}$ und $B = \{7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As\}$, so entsprechen die Elemente des kartesischen Produkts $A \times B$ gerade den 32 Karten eines Skatspiels, also $(Kreuz, 7)$, $(Kreuz, 8)$ usw. bis $(Karo, As)$.*

(ii) *Für Intervalle $A = [1, 2]$ und $B = [2, 3]$ können wir das* ***mehrdimensionale Intervall*** *(englisch: multi-dimensional interval) $A \times B = \{(x_1, x_2) \,|\, 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \ \wedge \ 2 \leqslant x_2 \leqslant 3\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wie folgt illustrieren:*



§ 5 Relationen

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.3

Relationen[39] geben Beziehungen zwischen Objekten an wie beispielsweise $1 \leqslant 3$ oder $5 \in \mathbb{N}$ oder $3 \mid 756$ („3 teilt 756").

Definition 5.1 (Relation).
Es seien X und Y Mengen. Ist $R \subseteq X \times Y$, so heißt (R, X, Y) eine ***Relation*** *(englisch: relation)* ***zwischen*** *X und Y. Die Menge R heißt der* ***Graph der Relation*** *(englisch: graph of a relation). Im Fall $Y = X$ sprechen wir von einer* ***homogenen Relation*** *(englisch: homogeneous relation)* ***auf*** *X.*

Wenn X und Y klar sind, sagt man auch oft, R selbst sei die Relation. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch xRy, um die Lesart „x steht in Relation zu y" zu erleichtern.

Beispiel 5.2 (Relation).

(*i*) *Ist X die Menge der Teilnehmenden an der Lehrveranstaltung* Lineare Algebra I *und $Y = \{Mathematik, Physik, Informatik\}$ eine Menge von Studienfächern, so ergibt die Beziehung „Die teilnehmende Person x studiert das Fach y." eine Relation zwischen X und Y.*

(*ii*) *Die folgende Tabelle stellt die* ***Teilbarkeitsrelation*** *(englisch: divisibility relation) „Die Zahl x teilt[40] die Zahl y." (kurz: $x \mid y$) auf der Menge $X = Y = \{0, 1, 2, \dots, 10\} = [\![0, 10]\!]$ dar:*

$x \mid y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	•										
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	•		•		•		•		•		•
3	•			•			•			•	
4	•				•				•		
5	•					•					•
6	•						•				
7	•							•			
8	•								•		
9	•									•	
10	•										•

(*iii*) *Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$ die* ***gewöhnliche Kleiner-Gleich-Relation auf $\mathbb{R}$*** *(englisch: usual less-or-equal relation).*

(*iv*) *Es sei X eine Menge, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge und $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$ die* ***Inklusionsrelation*** *(englisch: inclusion relation).*

(*v*) *Auf einer beliebigen Menge X heißt die Menge*

$$\Delta_X \coloneqq \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\} \tag{5.1}$$

die ***Diagonale*** *(englisch: diagonal) in $X \times X$. Die Relation $\mathrm{id}_X \coloneqq (\Delta_X, X, X)$ heißt die* ***Gleichheitsrelation*** *(englisch: equality relation) oder* ***Identitätsrelation*** *(englisch: identity) auf der Menge X.*

[39] lateinisch: relatio: Verhältnis, Beziehung

[40] Die Zahl $x \in \mathbb{Z}$ **teilt** (englisch: divides) die Zahl $y \in \mathbb{Z}$, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $y = n\,x$ gilt. Insbesondere teilt jede ganze Zahl die Zahl 0, und die Zahl 1 teilt jede ganze Zahl.

(*vi*) *Auf einer beliebigen Menge* X *heißt die Relation* $U_X := (U, X, X)$ *mit* $U = X \times X$ *die* ***universelle Relation*** *(englisch: universal relation).*

Quizfrage 5.1: Können Sie weitere Beispiele für Relationen benennen?

Definition 5.3 (Komposition von Relationen)**.**
Es seien X*,* Y *und* Z *Mengen sowie* (R, X, Y) *und* (S, Y, Z) *zwei Relationen. Dann heißt die Relation* $(S \circ R, X, Z)$ *mit*

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \,|\, \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\} \tag{5.2}$$

die ***Komposition*** *(englisch: composition, lateinisch: componere: zusammenstellen), die* ***Hintereinanderausführung****, die* ***Verknüpfung*** *oder die* ***Verkettung*** *von* R *und* S*.*

Quizfrage 5.2: Durch die Komposition welcher Relationen kann man die Relation „Onkel sein von“ ausdrücken?

Definition 5.4 (Umkehrrelation)**.**
Es seien X *und* Y *Mengen und* (R, X, Y) *eine Relation. Dann heißt* (R^{-1}, Y, X) *die* ***Umkehrrelation*** *(englisch: reverse relation) oder* ***inverse Relation*** *(englisch: inverse relation) von* R*, wobei*

$$R^{-1} := \{(b, a) \in Y \times X \,|\, (a, b) \in R\} \subseteq Y \times X$$

definiert ist.

Quizfrage 5.3: Wie bezeichnet man die Umkehrrelationen von „kleiner oder gleich sein als“, „Teilmenge sein von“ bzw. „Teiler sein von“?

Wir definieren nun einige wichtige Eigenschaften, die Relationen auf einer Menge besitzen können.

Definition 5.5 (Eigenschaften homogener Relationen)**.**
Es sei X *eine Menge und* (R, X, X) *eine Relation auf* X*.*

(*i*) R *heißt* ***reflexiv*** *(englisch: reflexive), wenn gilt:*

$$(x, x) \in R \quad \text{für alle } x \in R.$$

(*ii*) R *heißt* ***symmetrisch*** *(englisch: symmetric), wenn gilt:*

$$(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R.$$

(*iii*) R *heißt* ***antisymmetrisch*** *(englisch: antisymmetric), wenn gilt:*

$$(x, y) \in R \text{ und } (y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

(*iv*) R *heißt* ***transitiv*** *(englisch: transitive), wenn gilt:*

$$(x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R.$$

(*v*) *R heißt* ***total*** *(englisch: total), wenn gilt:*

$$(x, y) \in R \text{ oder } (y, x) \in R \quad \text{für alle } x, y \in R.$$

Quizfrage 5.4: Die Reflexivität von R kann man auch als $\mathrm{id}_X \subseteq R$ ausdrücken. Wie sieht das für die anderen Eigenschaften aus?

Beispiel 5.6 (Eigenschaften homogener Relationen)**.**

- *Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch, antisymmetrisch oder total.*
- *Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch oder total.*
- *Die Relation „x liebt y" auf einer Menge von Personen hat in der Regel keine der fünf genannten Eigenschaften.*

§ 5.1 Ordnungsrelationen

Definition 5.7 (Ordnungsrelation)**.**
Es sei X eine Menge.

(*i*) *Eine Relation (R, X, X) auf X heißt eine* ***Ordnungsrelation***, ***Halbordnung*** *oder* ***partielle Ordnung*** *(englisch: partial ordering), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Das Paar (X, R) heißt dann eine* ***halbgeordnete Menge*** *(englisch: partially ordered set).*

(*ii*) *Ist die Relation R zusätzlich total, dann heißt sie eine* ***Totalordnung*** *(englisch: total ordering). Das Paar (X, R) heißt dann eine* ***totalgeordnete Menge*** *(englisch: totally ordered set).*

Ordnungsrelationen werden oft mit Symbolen wie $\leqslant$, $\preccurlyeq$ oder $\subseteq$ notiert. Unter Verwendung der Notation $\preccurlyeq$ können wir für eine Ordnungsrelation auf X also festhalten, dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$x \preccurlyeq x, \tag{5.3a}$$

$$x \preccurlyeq y \text{ und } y \preccurlyeq x \quad \Rightarrow \quad x = y, \tag{5.3b}$$

$$x \preccurlyeq y \text{ und } y \preccurlyeq z \quad \Rightarrow \quad x \preccurlyeq z. \tag{5.3c}$$

Die Idee von Ordnungsrelationen ist es, Elemente einer Menge bezüglich einer bestimmten Eigenschaft zu vergleichen. Bei einer Totalordnung ist dabei jedes Element mit jedem Element vergleichbar, bei einer Halbordnung nicht unbedingt.

Beispiel 5.8 (Halbordnungen und Totalordnungen)**.**

(*i*) *Die Identitätsrelation id_X ist eine Halbordnung auf jeder Menge X.*

(*ii*) *Die universelle Relation U_X ist* keine *Halbordnung auf jeder Menge X, die mindestens zwei Elemente enthält.*

(*iii*) *Die Kleiner-Gleich-Relation $\leqslant$ ist eine Totalordnung auf jeder Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

(*iv*) *Die Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ jeder beliebigen Menge X. Sie ist eine totale Ordnung dann und nur dann, wenn X entweder kein oder genau ein Element enthält.*

(*v*) *Die Teilbarkeitrelation* $|$ *ist eine Halbordnung auf* $\mathbb{N}$.

Lemma 5.9 (Halbordnungen $\preccurlyeq$ und $\succcurlyeq$)**.**
Es sei $\preccurlyeq$ *eine Halbordnung auf einer Menge* X. *Dann ist auch die inverse Relation* $\succcurlyeq$ *eine Halbordnung auf* X. *Ist* $\preccurlyeq$ *eine Totalordnung, dann auch* $\succcurlyeq$.

Beweis. Dieser Beweis ist Teil von Hausaufgabe 2.3. □

Definition 5.10 (Vergleichbarkeit, obere und untere Schranken, Supremum und Infimum, maximale und minimale Elemente, Maximum und Minimum)**.**
Es sei X *mit der Relation* $\preccurlyeq$ *eine halbgeordnete Menge.*

(*i*) *Zwei Elemente* $x, y \in X$ *heißen* ***vergleichbar*** *(englisch: comparable), wenn* $x \preccurlyeq y$ *oder* $y \preccurlyeq x$ *gilt.*

(*ii*) $b \in X$ *heißt eine* ***obere Schranke*** *(englisch: upper bound) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$x \preccurlyeq b \quad \text{für alle } x \in A. \qquad \text{(„Ganz } A \text{ ist } \preccurlyeq\text{.“)}$$

(*iii*) $b \in X$ *heißt ein* ***Supremum*** *(englisch: supremum, lateinisch: supremum: das Größte) oder* ***kleinste obere Schranke*** *(englisch: least upper bound) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$b \text{ ist eine obere Schranke von } A, \text{ und für jede obere Schranke } b' \text{ von } A \text{ gilt: } b \preccurlyeq b'.$$

(*iv*) $b \in X$ *heißt ein* ***maximales Element*** *(englisch: maximal element) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$b \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } b \preccurlyeq x \implies x = b. \qquad \text{(„Kein Element von } A \text{ ist größer.“)}$$

(*v*) $b \in X$ *heißt ein* ***Maximum*** *(englisch: maximum) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$b \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } x \preccurlyeq b. \qquad \text{(„Ganz } A \text{ ist höchstens so groß.“)}$$

(*vi*) $a \in X$ *heißt eine* ***untere Schranke*** *(englisch: lower bound) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$a \preccurlyeq x \quad \text{für alle } x \in A. \qquad \text{(„Ganz } A \text{ ist } \succcurlyeq\text{.“)}$$

(*vii*) $a \in X$ *heißt ein* ***Infimum*** *(englisch: infimum, lateinisch: infimum: das Kleinste) oder* ***größte untere Schranke*** *(englisch: greatest lower bound) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$a \text{ ist eine untere Schranke von } A, \text{ und für jede untere Schranke } a' \text{ von } A \text{ gilt: } a' \preccurlyeq a.$$

(*viii*) $a \in X$ *heißt ein* ***minimales Element*** *(englisch: minimal element) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$a \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } x \preccurlyeq a \implies x = a. \qquad \text{(„Kein Element von } A \text{ ist kleiner.“)}$$

(*ix*) $a \in X$ *heißt ein* ***Minimum*** *(englisch: minimum) von* $A \subseteq X$, *wenn gilt:*

$$a \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } a \preccurlyeq x. \qquad \text{(„Ganz } A \text{ ist mindestens so groß.“)}$$

Wenn $A \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt, so heißt A ***nach oben beschränkt*** *(englisch: bounded above), ansonsten* ***nach oben unbeschränkt*** *(englisch: unbounded above). Wenn $A \subseteq X$ eine untere Schranke besitzt, so heißt A* ***nach unten beschränkt*** *(englisch: bounded below), ansonsten* ***nach unten unbeschränkt*** *(englisch: unbounded below).*

Wir zeigen nun einige ausgewählte Eigenschaften.

Lemma 5.11 (Eigenschaften und Beziehungen zwischen Supremum und Maximum, Infimum und Minimum).
Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge und $A \subseteq X$.

(i) *Existiert ein Supremum von A, so ist dieses eindeutig.*

(ii) *Existiert ein Maximum von A, so ist dieses eindeutig.*

(iii) *Ist b das Maximum von A, so ist b gleichzeitig das Supremum von A.*

(iv) *Hat A ein Supremum b, so gilt: Gehört b zu A, so ist b das Maximum von A. Gehört b nicht zu A, so besitzt A kein Maximum.*

Analoge Aussagen gelten auch für das Infinum und Minimum von A.

Beweis. Wir nehmen an, $b \in X$ und $b' \in X$ seien beides Suprema von A. Dann sind b und b' beides obere Schranken. Da b ein Supremum von A ist, gilt $b \preccurlyeq b'$. Da b' ein Supremum von A ist, gilt $b' \preccurlyeq b$. Aufgrund der Antisymmetrie von $\preccurlyeq$ folgt nun $b = b'$ Das beweist Aussage (i).

Wir nehmen an, $b \in X$ und $b' \in X$ seien beides Maxima von A. Dann gehören b und b' beide zu A. Da b ein Maximum von A ist, gilt $b' \preccurlyeq b$. Da b' ein Maximum von A ist, gilt $b \preccurlyeq b'$. Aufgrund der Antisymmetrie von $\preccurlyeq$ folgt nun $b = b'$ Das beweist Aussage (ii).

Es sei b das Maximum von A. Es gilt also $b \in A$ und $x \preccurlyeq b$ für alle $x \in A$. Das heißt aber, dass b eine obere Schranke von A ist. Ist nun b' eine weitere obere Schranke von A, dann gilt $x \preccurlyeq b'$ für alle $x \in A$, insbesondere $b \preccurlyeq b'$. Das zeigt, dass b das Supremum von A ist. Damit ist Aussage (iii) bewiesen.

Es sei b das Supremum von A. Insbesondere ist b eine obere Schranke von A, es gilt also $x \preccurlyeq b$ für alle $x \in A$. Falls nun b zu A gehört, dann ist b per Definition das Maximum von A. Falls jedoch b nicht zu A gehört, so ist b per Definition kein Maximum von A. Ein Maximum von A kann auch nicht existieren, sonst wäre es nach Aussage (iii) gleichzeitig das Supremum, also gleich b. Damit ist auch Aussage (iv) bewiesen. □

Beispiel 5.12 (Schranken, extremale Elemente, Maxima und Minima, Suprema und Infima).

(i) *In den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der gewöhnlichen Totalordnung $\leqslant$ ist die Zahl 1 das Minimum und damit das Infimum. Eine obere Schranke existiert nicht.*

(ii) *Es sei X eine beliebige nichtleere Menge. In der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der Halbordnung $\subseteq$ ist $\emptyset$ das Minimum von $\mathcal{P}(X)$ und X das Maximum von $\mathcal{P}(X)$. Die Teilmenge $A = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ hat das Infimum $\emptyset$, aber kein Minimum. Die minimalen Elemente von A sind genau die einelementigen Teilmengen von X.*

Quizfrage 5.5: Können Sie sich eine Menge mit einer Halbordnung oder einer totalen Ordnung vorstellen, die kein maximales Element besitzt?

§ 5.2 Äquivalenzrelation

Definition 5.13 (Äquivalenzrelation)**.**
Es sei X eine Menge. Eine Relation (R, X, X) auf X heißt eine ***Äquivalenzrelation*** *(englisch: equivalence relation), wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Elemente $x, y \in X$, die xRy erfüllen, heißen* ***(zueinander) äquivalent*** *(englisch: equivalent).*

Äquivalenzrelationen werden oft mit Symbolen wie $=$, $\sim$ oder $\equiv$ notiert. Unter Verwendung der Notation $\sim$ können wir für eine Äquivalenzrelation auf X also festhalten, dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$x \sim x, \tag{5.4a}$$
$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x, \tag{5.4b}$$
$$x \sim y \text{ und } y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z. \tag{5.4c}$$

Die Idee von Äquivalenzrelationen ist es, die Elemente einer Menge, die eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben, zusammenzugruppieren und als gleichwertig zu betrachten.

Beispiel 5.14 (Äquivalenzrelationen)**.**

(i) *Die Identitätsrelation id_X ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge X.*

(ii) *Die universelle Relation U_X ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge X.*

(iii) *Es sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Auf der Menge $X = \mathbb{Z}$ ist durch*

$$x \overset{m}{\equiv} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z}\ (x - y = n\, m) \tag{5.5}$$

*eine Äquivalenzrelation erklärt (**Quizfrage 5.6:** Details?). Anders ausgedrückt, x und y unterscheiden sich nur um ein Vielfaches von m, also, $m \mid (x - y)$. Diese Relation heißt* ***Kongruenzrelation modulo** m (englisch: congruence relation modulo m).*[41]

Definition 5.15 (Äquivalenzklasse, Repräsentant)**.**
Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$. Für $x \in X$ heißt die Menge

$$[x] \coloneqq \{y \in X \mid y \sim x\} \tag{5.6}$$

die ***Äquivalenzklasse*** *(englisch: equivalence class) von x bzgl. $\sim$. Statt $[x]$ schreibt man manchmal auch $[x]_\sim$ oder auch $x/{\sim}$.*

Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt ein ***Repräsentant*** *(englisch: representative, lateinisch: repraesentare: darstellen) dieser Äquivalenzklasse. Eine Menge $S \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, heißt ein* ***Repräsentantensystem*** *(englisch: system of representatives) von $\sim$.*

Beispiel 5.16 (Äquivalenzklasse, Repräsentant)**.**

(i) *Wir betrachten eine beliebige Menge X mit der Identitätsrelation. Dann gilt $[x] = \{x\}$ für alle $x \in X$. Jede Äquivalenzklasse hat also nur ein Element und damit einen eindeutigen Repräsentanten. Das einzige Repräsentantensystem ist X selbst.*

[41] Oft wird diese Relation statt $x \overset{m}{\equiv} y$ als $x \equiv y \pmod m$ geschrieben.

(*ii*) *Wir betrachten eine beliebige Menge X mit der universellen Relation. Dann gilt $[x] = X$ für alle $x \in X$. Falls $X \neq \emptyset$ ist, dann gibt es also nur eine Äquivalenzklasse, und diese enthält alle Elemente von X. In diesem Fall ist jede einelementige Teilmenge von X ein Repräsentantensystem.*

(*iii*) *Die Äquivalenzklassen der Kongruenzrelation modulo m ($m \in \mathbb{N}$) heißen auch die* ***Restklassen modulo** m* *(englisch: residue classes).*[42] *Die Restklasse von $a \in \mathbb{Z}$ modulo m ist also*

$$\begin{aligned}[a] &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \overset{m}{\equiv} a\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ (y - a = n\, m)\} \\ &= \{a + n\, m \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= a + m\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Das Repräsentantensystem $\{0, 1, \dots, m-1\}$ heißt das ***natürliche Repräsentantensystem*** *(englisch: natural system of representatives) der Kongruenzrelation modulo m.*

(*iv*) *Speziell im Fall $m = 2$ gibt es genau zwei Äquivalenzklassen (Restklassen):*

$$\begin{aligned}[0] &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \overset{2}{\equiv} 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ (y - 0 = 2\, n)\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist gerade}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1] &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \overset{2}{\equiv} 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ (y - 1 = 2\, n)\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist ungerade}\}.\end{aligned}$$

Das natürliche Repräsentantensystem ist $\{0, 1\}$, ein anderes ist $\{-2, 4339\}$.

Satz 5.17 (Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt)**.**
Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$. Weiter seien $[x]$ und $[y]$ zwei Äquivalenzklassen. Dann sind diese entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. Nehmen wir an, $[x]$ und $[y]$ seien nicht disjunkt. Das heißt, sie haben ein Element $z \in X$ gemeinsam. Es sei nun x' ein beliebiges Element aus $[x]$. Dann gilt

$$x' \sim x \sim z.$$

Wegen der Transitivität von $\sim$ ist also x' äquivalent zu z, das nach Voraussetzung zu $[y]$ gehört. Damit haben wir $[x] \subseteq [y]$ gezeigt. Die umgekehrte Inklusion folgt analog. □

Definition 5.18 (Partition)**.**
Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Menge von Teilmengen von X, also $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{U}$ heißt eine ***Partition*** *(englisch: partition) oder* ***disjunkte Zerlegung*** *von X, wenn gilt:*

(*i*) *Für alle $x \in X$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$, die x enthält.*

(*ii*) *Für alle $U, U' \in \mathcal{U}$ gilt, dass U und U' entweder gleich sind oder disjunkt.*

(*iii*) $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

[42] Der Name leitet sich aus der Tatsache ab, dass die Elemente einer Restklasse durch die Eigenschaft charakterisiert sind, dass sie bei ganzzahliger Division durch m denselben Rest lassen.

Zu Eigenschaft (i) sagen wir auch, dass die Mengen in $\mathcal{U}$ die Menge X **überdecken** (englisch: to cover) oder eine **Überdeckung** (englisch: cover, covering) von X darstellen. Zu Eigenschaft (ii) sagen wir, dass die Mengen in $\mathcal{U}$ **paarweise disjunkt** (englisch: pairwise disjoint) sind.

Satz 5.19 (Partitionen werden genau durch Äquivalenzrelationen erzeugt)**.**

(i) *Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$. Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen $\{[x] \mid x \in X\}$ eine Partition von X.*

(ii) *Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Partition von X. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $\sim$, sodass $\mathcal{U}$ genau aus den Äquivalenzklassen von $\sim$ besteht.*

Wir könnten diesen Satz etwas ungenau auch so ausdrücken, dass die Partition einer Menge X „dasselbe" ist wie eine Äquivalenzrelationen auf X.

Beweis. Aussage (i): Zur Abkürzung sei $\mathcal{U} := \{[x] \mid x \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir weisen die Eigenschaften der Definition 5.18 nach. Zunächst ist jedes $x \in X$ Element seiner Äquivalenzklasse $[x]$, da ja $x \sim x$ gilt. Das zeigt Eigenschaft (i). Nach Satz 5.17 sind Äquivalenzklassen paarweise disunkt. Das zeigt Eigenschaft (ii). Schließlich sind Äquivalenzklassen nicht leer. Damit ist auch Eigenschaft (iii) gezeigt.

Der Beweis von Aussage (ii) ist Teil von Hausaufgabe 2.3. □

Definition 5.20 (Quotientenmenge, Invarianz)**.**
Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

(i) *Die Menge der Äquivalenzklassen*

$$X/{\sim} := \{[x] \mid x \in X\} \tag{5.7}$$

*heißt auch die **Quotientenmenge** (englisch: quotient set) oder die **Faktormenge** (englisch: factor set) von $\sim$.*

(ii) *Eine Aussageform A auf X heißt **invariant** (englisch: invariant) oder **wohldefiniert** (englisch: well-defined) unter $\sim$, wenn $x \sim y$ impliziert, dass $A(x)$ und $A(y)$ denselben Wahrheitswert haben.*

Die Invarianz ist wichtig, wenn man eine Aussageform auf der Quotientenmenge dadurch definieren möchte, dass man sie auf den Elementen jeder Äquivalenzklasse definiert. Dabei ist sicherzustellen, dass sich tatsächlich für jedes Element einer Äquivalenzklasse derselbe Wahrheitswert ergibt.

Beispiel 5.21 (wohldefinierte Aussageformen)**.**

(i) *Die Aussageform „x ist eine gerade ganze Zahl" ist unter der Kongruenzrelation $\overset{2}{\equiv}$ wohldefiniert, da die Restklassen $[0]$ und $[1]$ jeweils nur aus geraden bzw. nur aus ungeraden ganzen Zahlen bestehen.*

(ii) *Dieselbe Aussageform ist jedoch unter der Kongruenzrelation $\overset{3}{\equiv}$ nicht wohldefiniert, da die Restklassen $[0]$, $[1]$ und $[2]$ jeweils sowohl gerade als auch ungerade ganze Zahlen enthalten.*

Ende der Woche 2

§ 6 Abbildungen

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.3, Deiser, 2022b, Kapitel 1.4

In diesem Abschnitt geht es um den grundlegenden Begriff der Abbildung oder Funktion. Eine Abbildung ist dabei nichts anderes als eine spezielle Relation.

Definition 6.1 (weitere Eigenschaften von Relationen).
Es seien X und Y Mengen. Eine Relation (R, X, Y) zwischen X und Y heißt

(i) ***linkstotal*** *(englisch: left-total), falls für alle $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass xRy gilt.*

(ii) ***rechtseindeutig*** *(englisch: right-unique), falls für alle $x \in X$ und alle $y, y' \in Y$ gilt: $xRy \wedge xRy' \Rightarrow y = y'$.*

Definition 6.2 (Funktion).
Es seien X und Y Mengen. Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation (f, X, Y) zwischen X und Y heißt ***Abbildung*** *(englisch: map) oder* ***Funktion*** *(englisch: function)* ***von*** *X* ***in*** *Y oder* ***auf*** *X* ***mit Werten in*** *Y. Die Menge X heißt der* ***Definitionsbereich*** *(englisch: domain) oder die* ***Definitionsmenge*** *und die Menge Y der* ***Zielmenge*** *(englisch: codomain) von f. Ist $Y = X$, so spricht man auch von einer Funktion von X* ***in sich****.*

Den Sachverhalt, dass f eine Funktion von X in Y ist, drücken wir auch in der Form

$$f : X \to Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{oder} \quad Y \xleftarrow{f} X$$

aus. Statt xfy schreiben wir $y = f(x)$ oder $x \mapsto f(x)$ und sagen, x werde **abgebildet auf** $f(x)$. Auch die kompakten Schreibweisen

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y \quad \text{oder} \quad f : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

für die Definition einer Funktion sind üblich.

Beachte: Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Definitionsbereichen, Zielmengen und ihren Abbildungsvorschriften übereinstimmen.

Die Menge

$$\big\{(x, f(x)) \,\big|\, x \in X\big\} \subseteq X \times Y \tag{6.1}$$

heißt der **Graph** (englisch: graph) der Funktion $f : X \to Y$.[43]

Beispiel 6.3 (Abbildungen).

(i) *Es seien X und Y Mengen und $y_0 \in Y$. Dann heißt die Abbildung f mit*

$$X \ni x \mapsto f(x) := y_0 \in Y$$

die ***konstante Funktion*** *(englisch: constant function) auf X mit dem Wert y_0.*

[43] Der Begriff des Graphen einer Funktion stimmt also überein mit dem Begriff des Graphen der Funktion als Relation, vgl. Definition 5.1.

(*ii*) *Es seien X und Y Mengen mit $X \subseteq Y$. Dann heißt die Abbildung $i_{X\to Y}$ mit*

$$X \ni x \mapsto i_{X\to Y}(x) \coloneqq x$$

die ***kanonische*** *oder* ***natürliche Injektion*** *(englisch: canonical injection, natural injection) oder die* ***kanonische*** *oder* ***natürliche Einbettung*** *(englisch: canonical embedding, natural embedding) von X in Y.*

(*iii*) *Im Fall $X = Y$ heißt die kanonische Einbettung auch die* ***Identität*** *(englisch: identity) oder* ***identische Abbildung*** *(englisch: identity map) von X in Y und wird mit id_X bezeichnet, also*

$$X \ni x \mapsto \mathrm{id}_X(x) \coloneqq x.$$

Der Graph von id_X ist also gerade die Diagonale Δ_X, siehe (5.1).

Definition 6.4 (Bild, Einschränkung, Fortsetzung).
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.[44]

(*i*) *Für $A \subseteq X$ heißt*

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\} \tag{6.2}$$

die ***Bildmenge*** *oder kurz das* ***Bild*** *(englisch: image) von f* ***auf*** *A oder das* ***Bild*** *von A* ***unter*** *f.*

(*ii*) *Ist $A \subseteq X$, dann heißt die Funktion $f|_A$*

$$A \ni x \mapsto f|_A(x) \coloneqq f(x) \in Y$$

die ***Einschränkung*** *oder* ***Restriktion*** *(englisch: restriction, lateinisch: restringere: zurückziehen) von f auf A.*

(*iii*) *Gilt zusätzlich $f(A) \subseteq B$, so bezeichnen wir mit $f|_A^B$ die Einschränkung von f auf A, wobei zusätzlich die Zielmenge durch B ersetzt wird, also die Funktion*

$$A \ni x \mapsto f|_A^B(x) \coloneqq f(x) \in B.$$

Gilt insbesondere $f(X) \subseteq B$, dann bezeichnet $f|^B$ die Funktion

$$X \ni x \mapsto f|^B(x) \coloneqq f(x) \in B,$$

bei der gegenüber f nur die Zielmenge ersetzt wird.

(*iv*) *Ist $A' \supseteq X$ und $B' \supseteq Y$, dann heißt eine Funktion $g\colon A' \to B'$, die auf X mit f übereinstimmt, für die also $g|_X^Y = f$ gilt, eine* ***Fortsetzung*** *(englisch: extension) von f.*

Beispiel 6.5 (Bild, Einschränkung, Fortsetzung).
Wir betrachten die Funktionen[45]

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni x &\mapsto f(x) \coloneqq \sin(x) \in \mathbb{R} && \textit{mit dem Bild } [-1,1],\\
\mathbb{R} \ni x &\mapsto g(x) \coloneqq \sin(x) \in [-1,1] && \textit{mit dem Bild } [-1,1],\\
\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ni x &\mapsto h(x) \coloneqq \sin(x) \in [-1,1] && \textit{mit dem Bild } \{-1,0,1\},\\
\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ni x &\mapsto i(x) \coloneqq \sin(x) \in \{-1,0,1\} && \textit{mit dem Bild } \{-1,0,1\}.
\end{aligned}$$

Dann sind g, h und i Einschränkungen von f, und f ist eine Fortsetzung von g, h und i.

[44] Wir sagen damit insbesondere, dass X und Y Mengen sind.
[45] Hierbei bedeutet $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ die Menge der ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

Definition 6.6 (Urbild).
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{6.3}$$

*das **Urbild** (englisch: pre-image) von B **unter** f.*

Beispiel 6.7 (Urbild).
Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & \text{falls } y > 0, \\ \{0\} & \text{falls } y = 0, \\ \emptyset & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Satz 6.8 (Bilder und Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten).
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien I und J irgendwelche Indexmengen und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von X sowie $(Y_j)_{j \in J}$ eine Menge von Teilmengen von Y. Dann gilt:

$$f\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(X_i) \tag{6.4a}$$

$$f\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i) \tag{6.4b}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j) \tag{6.4c}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j) \tag{6.4d}$$

Beweis. Wir beweisen hier nur (6.4a) und (6.4c). Die Aussagen (6.4b) und (6.4d) sind Teil von Hausaufgabe 3.1.

Zum Beweis von (6.4a):

$$\begin{aligned} & y \in f\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) & \\ \Leftrightarrow\quad & \exists i \in I \; \exists x \in X_i \; (y = f(x)) & \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge} \\ \Leftrightarrow\quad & \exists i \in I \; (y \in f(X_i)) & \text{nach Definition (6.2) des Bildes } f(X_i) \\ \Leftrightarrow\quad & y \in \bigcup_{i \in I} f(X_i) & \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge.} \end{aligned}$$

Zum Beweis von (6.4c):

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} Y_j\Big) & \\ \Leftrightarrow\quad & \exists y \in \bigcup_{j \in J} Y_j \; \big(y = f(x)\big) & \text{nach Definition (6.3) des Urbildes} \\ \Leftrightarrow\quad & \exists j \in J \; \exists y \in Y_j \; \big(y = f(x)\big) & \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge} \\ \Leftrightarrow\quad & \exists j \in J \; \big(x \in f^{-1}(Y_j)\big) & \text{nach Definition (6.3) des Urbildes} \\ \Leftrightarrow\quad & x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j) & \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge.} \end{aligned}$$

□

Beispiel 6.9 (Bilder und Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten).
In (6.4b) *gilt i. A. nicht die Gleichheit, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei*

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := x \in \mathbb{R}.$$

Für die Mengen $A := \{(0,0)\}$ *und* $B = \{(0,1)\}$ *gilt*

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &= f(\emptyset) = \emptyset, \\ \text{aber} \quad f(A) \cap f(B) &= \{0\} \cap \{0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

§ 6.1 Injektivität und Surjektivität

Definition 6.10 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität).
Eine Funktion $f : X \to Y$ *heißt*

(i) ***surjektiv*** *(englisch: surjective, onto) oder* ***rechtstotal*** *(englisch: right-total), wenn* $f(X) = Y$ *gilt.*[46] *Man sagt auch,* f *bilde* X ***auf*** Y *ab.*

(ii) ***injektiv*** *(englisch: injective, one-to-one) oder* ***linkseindeutig*** *(englisch: left-unique), wenn für alle* $x, x' \in X$ *gilt:* $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.[47]

(iii) ***bijektiv*** *(englisch: bijective), wenn* f *surjektiv und injektiv ist.*[48]

Als Substantive sind die Bezeichnungen **Surjektion** (englisch: surjection), **Injektion** (englisch: injection) und **Bijektion** (englisch: bijection) geläufig.

Quizfrage 6.1: Können Sie (nicht-mathematische) Beispiele für injektive, surjektive bzw. bijektive Funktionen benennen?

Lemma 6.11 (Bijektiv-Machen einer injektiven Funktion).
Es sei $f : X \to Y$ *eine injektive Funktion. Dann ist* $f|^{f(X)}$ *(also die Einschränkung der Zielmenge auf die tatsächliche Bildmenge) bijektiv.*

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von Hausaufgabe 3.2. □

Beispiel 6.12 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität).

(i) *Die Funktion*

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

ist nicht surjektiv und nicht injektiv.

(ii) *Die Funktion*

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv. Hierbei ist $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ *die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.*

[46] Die Surjektivität von f wird manchmal auch durch die Schreibweise $f : X \twoheadrightarrow Y$ ausgedrückt.
[47] Die Injektivität von f wird manchmal auch durch die Schreibweise $f : X \rightarrowtail Y$ ausgedrückt.
[48] Die Bijektivität von f wird manchmal auch durch die Schreibweise $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ ausgedrückt.

(*iii*) *Die Funktion*

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(*iv*) *Die Funktion*

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

ist bijektiv.

(*v*) *Sind X und Y Mengen mit $X \subseteq Y$, dann ist die kanonische Injektion $i_{X\to Y}$ injektiv.*

Lemma 6.13 (Komposition von Funktionen).
Es seien $f\colon X \to Y'$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen, wobei $f(X) \subseteq Y$ gelte. Dann ist

$$X \ni x \mapsto h(x) := g(f(x)) \in Z$$

eine Funktion.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jedes $x \in X$ genau ein $z \in Z$ existiert, sodass $z = h(x)$ gilt. Es sei also $x \in X$. Da f eine Funktion $X \to Y'$ ist, existiert genau ein $y \in f(X) \subseteq Y'$ mit $y = f(x)$. Da g eine Funktion $Y \to Z$ ist und $y \in f(X) \subseteq Y$ gilt, existiert genau ein $z \in g(Y)) \subseteq Z$ mit $z = g(y) = g(f(x))$. □

Definition 6.14 (Komposition von Funktionen).
Es seien $f\colon X \to Y'$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen, wobei $f(X) \subseteq Y$ gelte. Die Funktion

$$X \ni x \mapsto h(x) := g(f(x)) \in Z$$

heißt die ***Komposition*** *(englisch: composition, lateinisch: componere: zusammenstellen), die* ***Hintereinanderausführung****, die* ***Verknüpfung*** *oder die* ***Verkettung*** *von f und g. Sie wird auch mit $h = g \circ f$ bezeichnet.*

Wir können diesen Sachverhalt auch durch

$$\begin{tikzcd} Z & Y \arrow[l, "g"'] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g \circ f"] \end{tikzcd}$$

illustrieren.

Beispiel 6.15 (Komposition von Funktionen).
Es seien

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := x^2 \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) := x + 1 \in \mathbb{R}.$$

Dann sind $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, also sind sowohl $g \circ f$ als auch $f \circ g$ definiert. Sie sind gegeben durch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (g \circ f)(x) := x^2 + 1 \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (f \circ g)(x) := (x+1)^2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 6.16 (Komposition mit der Identität und mit der kanonischen Einbettung).
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f, && && (6.5)\\
& f|_A = f \circ i_{A \to X} && \text{für } A \subseteq X, && (6.6)\\
& f = (i_{Y \to B} \circ f)|^Y && \text{für } B \supseteq Y. && (6.7)
\end{aligned}
$$

Lemma 6.17 (Komposition von Funktionen ist assoziativ).
Es seien $f\colon X \to Y'$, $g\colon Y \to Z'$ und $h\colon Z \to W$ Funktionen, wobei $f(X) \subseteq Y$ und $g(Y)) \subseteq Z$ gelte. Dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, d. h., die Komposition von Funktionen ist assoziativ.

Beweis. Zunächst klären wir, dass die Funktionen $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ überhaupt definiert sind. Wegen $g(Y)) \subseteq Z$ ist die Komposition $h \circ g$ definiert. Damit ist wegen $f(X) \subseteq Y$ auch $(h \circ g) \circ f$ definiert. Andererseits ist wegen $f(X) \subseteq Y$ zunächst $g \circ f$ definiert. Weiter gilt $(g \circ f)(X) = g(f(X)) \subseteq g(Y))$, und wegen $g(Y)) \subseteq Z$ ist auch $h \circ (g \circ f)$ definiert.

Schließlich gilt für $x \in X$

$$
\begin{aligned}
& \big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))\\
\text{und}\quad & \big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h(g(f(x))).
\end{aligned}
$$

Folglich stimmen $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ und $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ in Definitionsbereich, Zielmenge und Abbildungsvorschrift überein. □

Lemma 6.18 (Komposition injektiver und surjektiver Funktionen).
Es seien $f\colon X \to Y'$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen, wobei $f(X) \subseteq Y$ gelte.

(*i*) *Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.*

(*ii*) *Sind f und g beide surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.*

(*iii*) *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.*

(*iv*) *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.*

Beweis. Aussage (*i*): Für $x, x' \in X$ gelte $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, also $g(f(x)) = g(f(x'))$. Aus der Injektivität von g folgt $f(x) = f(x')$, und aus der Injektivität von f folgt weiter $x = x'$. Also ist $g \circ f$ injektiv.

Aussage (*ii*): Es sei $z \in Z$. Aufgrund der Surjektität von g gibt es ein $y \in Y$, sodass $z = g(y)$ gilt. Wegen der Surjektivität von f gibt es ein $x \in X$, sodass $y = f(x)$ gilt. Es gilt also $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, d. h., $z \in (g \circ f)(X)$.

Aussage (*iii*): Es seien $x, x' \in X$, sodass $f(x) = f(x')$ gilt. Dann gilt auch $g(f(x)) = g(f(x'))$, und wegen der Injektivität von $g \circ f$ folgt $x = x'$, d. h., f ist injektiv.

Aussage (*iv*): Es sei $z \in Z$. Aufgrund der Surjektivität von $g \circ f$ gibt es ein $x \in X$, sodass $z = g(f(x))$ gilt. Das heißt aber $z = g(y)$ für $y = f(x)$, also ist g surjektiv. □

Folgerung 6.19 (Komposition zur Identität).
Es seien $f\colon X \to Y'$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen, wobei $f(X) \subseteq Y$ gelte. Wenn $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Beweis. Die Identitätsabbildung id_X ist bijektiv. Aus Lemma 6.18, Aussagen (iii) und (iv) folgt daher, dass f injektiv und g surjektiv ist. □

§ 6.2 Umkehrabbildung

Lemma 6.20 (Charakterisierung der Bijektivität).
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist bijektiv.*

(ii) *Für alle $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$.*

(iii) *Es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Die Abbildung g ist eindeutig bestimmt und notwendig bijektiv.*

Beweis. Aussage (i) $\Rightarrow$ Aussage (ii): Es sei f bijektiv, also surjektiv und injektiv. Ist $y \in Y$ beliebig, dann folgt aus der Surjektivität die Existenz eines $x \in X$ mit $f(x) = y$. Ist $x' \in X$ ein weiteres Element mit $f(x') = y$, dann folgt aus der Injektivität $x = x'$.

Aussage (ii) $\Rightarrow$ Aussage (iii): Wir definieren die Abbildung $g\colon Y \to X$ wie folgt: Wir setzen für $y \in Y$ als $g(y)$ das nach Voraussetzung eindeutig definierte $x \in X$, für das $y = f(x)$ gilt. Für diese Funktion haben wir also $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X$$

sowie

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Damit ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gezeigt.

Es sei nun $g'\colon Y \to X$ eine weitere Funktion mit der Eigenschaft $f \circ g' = \mathrm{id}_Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g &= g \circ \mathrm{id}_Y && \text{nach (6.5)} \\
&= g \circ (f \circ g') && \text{nach Voraussetzung} \\
&= (g \circ f) \circ g' && \text{nach Lemma 6.17} \\
&= \mathrm{id}_X \circ g' && \text{nach Voraussetzung} \\
&= g' && \text{nach (6.5).}
\end{aligned}$$

Aussage (iii) $\Rightarrow$ Aussage (i): Die Abbildung $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist bijektiv, insbesondere injektiv. Aus Lemma 6.18 (iii) folgt also, dass f injektiv ist. Die Abbildung $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ist bijektiv, insbesondere surjektiv. Aus Lemma 6.18 (iv) folgt also, dass f surjektiv ist. □

Die Funktion $g\colon Y \to X$ aus Aussage (iii) heißt die **Umkehrfunktion**, **Umkehrabbildung**, **inverse Funktion** oder **inverse Abbildung** (englisch: inverse map) von f. Sie wird mit $f^{-1}\colon Y \to X$ bezeichnet. Für ihre Abbildungsvorschrift gilt $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Bemerkung 6.21 (Umkehrfunktion).
Das Symbol f^{-1} für die Umkehrfunktion muss vom Urbild der Funktion f unterschieden werden. Wenn die Umkehrfunktion von $f\colon X \to Y$ existiert, so gilt jedoch

$$\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{\text{Urbild von } \{y\}} = \{\underbrace{f^{-1}(y)}_{\text{Wert der Umkehrfunktion bei } y}\}.$$

Satz 6.22 (Umkehrfunktion der Komposition)**.**

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ bijektive Funktionen. Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv, und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{6.8}$$

Quizfrage 6.2: Wie erklärt man sich anschaulich, dass sich bei der Umkehrfunktion die Reihenfolge ändert?

Beweis. Die Bijektivität von $g \circ f$ folgt sofort aus Lemma 6.18, Aussagen (i) und (ii). Wir wissen über die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} & (g \circ f)^{-1}(z) = x \\ \Leftrightarrow \quad & (g \circ f)(x) = z \\ \Leftrightarrow \quad & g(f(x)) = z \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = g^{-1}(z) \\ \Leftrightarrow \quad & x = f^{-1}(g^{-1}(z)) \\ \Leftrightarrow \quad & x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ und $z \in Z$. Das bedeutet aber $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Lemma 6.23 (Charakterisierung der Injektivität)**.**

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $X \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist injektiv.*

(ii) *Es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Eine solche Abbildung heißt eine **Linksinverse** (englisch: left inverse) von f. Sie ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $g|_{f(X)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.*

Beweis. Aussage (i) $\Rightarrow$ Aussage (ii): Wir definieren zunächst eine Abbildung $\overline{g}\colon f(X) \to X$ wie folgt: Wir setzen für $y \in f(X)$ als $\overline{g}(y)$ das wegen der Injektivität eindeutig definierte $x \in X$, für das $y = f(x)$ gilt. Für diese Funktion haben wir also $\overline{g}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ und damit

$$(\overline{g} \circ f)(x) = \overline{g}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Damit ist $\overline{g} \circ f = \mathrm{id}_X$ gezeigt. Aufgrund von Folgerung 6.19 ist $\overline{g}$ surjektiv. Wir setzen nun $\overline{g}\colon f(X) \to X$ zu $g\colon X \to X$ fort. Dazu wählen wir irgendein $x_0 \in X$ und setzen $g(y) \coloneqq \overline{g}(y)$ für $y \in f(X)$ und $g(y) \coloneqq x_0$ für $y \in Y \setminus f(X)$. Die Funktion g erbt die Surjektivität von $\overline{g}$.

Angenommen, $h\colon Y \to X$ sei eine andere Linksinverse von f. Dann gilt für $y \in f(X)$ aufgrund der Injektivität von f: Es gibt genau ein $x \in X$ mit der Eigenschaft $y = f(x)$. Wegen $h(y) = h(f(x)) = x$ und ebenso $g(y) = g(f(x)) = x$ müssen g und h auf $f(X)$ übereinstimmen. □

Eine analoge Charakterisierung der Surjektivität folgt erst in Satz 6.35, weil wir dafür interessanterweise das Auswahlaxiom benötigen.

§ 6.3 Mächtigkeit von Mengen

Mit Hilfe von Funktionen können wir Mengen in ihrer Mächtigkeit, das heißt vereinfacht gesagt bzgl. der Anzahl ihrer Elemente, vergleichen.

Definition 6.24 (Gleichmächtigkeit von Mengen).
*Es seien X und Y Mengen. Wir sagen, X sei **gleichmächtig** (englisch: equinumerous) zu Y, wenn es eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim Y$.*

Die Gleichmächtigkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen, siehe Hausaufgabe 3.3. Die Äquivalenzklassen heißen **Kardinalzahlen** (englisch: cardinal numbers).

Definition 6.25 (Endlichkeit, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit).
Es sei X eine Menge.

*(i) X heißt **endlich** (englisch: finite), wenn $X \sim [\![1, n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, ansonsten **unendlich** (englisch: infinite).*

*(ii) Wenn X endlich ist mit $X \sim [\![1, n]\!]$, dann heißt $n \in \mathbb{N}_0$ die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** (englisch: cardinality) von X. Wir schreiben dann: $\#M = n$.*

*(iii) X heißt **abzählbar unendlich** (englisch: countably infinite), wenn $X \sim \mathbb{N}$ gilt.*

*(iv) X heißt **abzählbar** (englisch: countable), wenn X entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, ansonsten **überabzählbar** (englisch: uncountable).*

Beachte: Die leere Menge $\emptyset$ ist nur zu sich selbst gleichmächtig. Sie ist die einzige Menge mit Mächtigkeit 0.

Beispiel 6.26 (Gleichmächtigkeit von Mengen, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit).

(i) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist gleichmächtig zur Menge der geraden ganzen Zahlen $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sie ist abzählbar unendlich.

*(ii) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.
(Beweis in der Vorlesung* Analysis*)*

*(iii) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
(Beweis in der Vorlesung* Analysis*)*

Lemma 6.27 (Veränderung der Kardinalität um 1).
Es sei X eine endliche Menge und $x \in X$. Dann gilt

$$\#X = \#(X \setminus \{x\}) + 1. \tag{6.9}$$

Beweis. Es sei $n = \#(X \setminus \{x\}) \in \mathbb{N}_0$. Es gibt also eine bijektive Abbildung $f': \{1, \ldots, n\} \to X \setminus \{x\}$. Wir definieren $f: \{1, \ldots, n+1\} \to X$ durch $f(i) := f'(i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $f(n+1) := x$. Dann ist f ebenfalls bijektiv, d. h., $\#X = n + 1 = \#(X \setminus \{x\}) + 1$. □

Satz 6.28 (Funktionen auf endlichen Mengen).
Es seien X und Y endliche, gleichmächtige Mengen und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(*i*) f *ist injektiv.*

(*ii*) f *ist surjektiv.*

(*iii*) f *ist bijektiv.*

Beweis. Aussage $(i) \Rightarrow$ Aussage (ii): Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Mächtigkeit $n = \#X = \#Y$. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 0$, also $X = Y = \emptyset$. Dann ist die einzig mögliche Abbildung die leere Abbildung, diese ist bijektiv. Im Induktionsschritt schließen wir von n auf $n + 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei also nun $\#X = \#Y = n + 1$. Wir wählen ein $x \in X$ und setzen $y \coloneqq f(x)$. Dann gilt aufgrund von Lemma 6.27 $\#X \setminus \{x\} = \#Y \setminus \{y\} = n$.

Wir bezeichnen mit $f' : X' \to Y'$ die Einschränkung von f. Diese ist aufgrund der vorausgesetzten Injektivität definiert, denn x ist das einzige Element von X, das durch f auf y abgebildet wird. Außerdem erbt f' die Injektivität von f. Nach Induktionsvoraussetzung ist f' daher auch surjektiv, alle Elemente von Y' liegen also im Bild von f' und damit im Bild von f. Da auch y im Bild von f Folglich ist auch f surjektiv, denn y liegt ja ebenfalls im Bild von f.

Aussage $(iii) \Rightarrow$ Aussage (i) folgt aus der Definition der Bijektivität.

Aussage $(iii) \Rightarrow$ Aussage (ii) folgt aus der Definition der Bijektivität. □

Beachte: Die Aussage von Satz 6.28 ist falsch, wenn X und Y zwar gleichmächtig, aber nicht endlich sind, siehe Hausaufgabe 3.3.

Der Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen erlaubt noch keinen Vergleich von Mengen. Dazu dient folgende Definition.

Definition 6.29 (Vergleich der Mächtigkeit von Mengen)**.**
Es seien X und Y Mengen. Wir sagen X sei ***höchstens gleichmächtig*** *(englisch: at most equinumerous) zu Y, wenn es eine bijektive Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \precsim Y$.*

Die Reflexivität und Transitivität der Relation $\precsim$ sind leicht einzusehen. (**Quizfrage 6.3:** Details?) Der Beweis der Antisymmetrie ist jedoch aufwändig und erfordert den Satz von Cantor-Bernstein-Schröder, der äquivalent zum Auswahlaxiom (siehe § 6.5) ist. Unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms kann man außerdem zeigen, dass zwei Mengen bzgl. $\precsim$ stets vergleichbar sind. Es folgt, dass $\precsim$ sogar eine totale Ordnung auf der Klasse aller Mengen ist.

§ 6.4 Familien und Folgen

Definition 6.30 (Familie von Elementen, Teilfamilie, Oberfamilie, Folge, endliche Folge)**.**
Es seien I und Y Mengen.

(*i*) *Eine Abbildung*

$$I \ni i \mapsto y(i) \coloneqq y_i \in Y$$

heißt eine ***Familie von Elementen*** *(englisch: family of elements) aus Y mit der* ***Indexmenge*** *(englisch: index set) I. Kurz wird diese auch mit $(y_i)_{i \in I}$ bezeichnet.*

(*ii*) *Ist $I' \subseteq I$, dann heißt $(y_i)_{i \in I'}$ eine* ***Teilfamilie*** *(englisch: subfamily) von $(y_i)_{i \in I}$, und $(y_i)_{i \in I}$ heißt eine* ***Oberfamilie*** *(englisch: superfamily) von $(y_i)_{i \in I'}$*

(*iii*) *Ist I abzählbar unendlich, gilt also $I \sim \mathbb{N}$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine* ***abzählbar unendliche Familie*** *(englisch: countably infinite family). Ist speziell $I = \mathbb{N}$ oder allgemeiner $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}$ mit einem Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine* ***Folge*** *(englisch: sequence) in Y.*

(*iv*) *Ist I endlich, gilt also $I \sim [\![1, n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine* ***endliche Familie*** *(englisch: finite family). Ist speziell $I = [\![1, n]\!]$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine* ***endliche Folge*** *(englisch: finite sequence) in Y.*

Bemerkung 6.31 (Familien und Mengen)**.**

(*i*) *Im Unterschied zu einer Menge kann eine Familie $(y_i)_{i \in I}$ Elemente mehrfach enthalten.*

(*ii*) *Jeder Familie $(y_i)_{i \in I}$ von Elementen aus Y können wir eine Menge $\{y_i \mid i \in I\} \subseteq Y$ zuordnen.*

(*iii*) *Wir können eine endliche Folge auch als* ***n-Tupel*** *(englisch: n-tuple) $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ notieren. Während $(y_i)_{i \in I}$ keine Reihenfolge hat (da I als Menge ungeordnet ist), hat ein n-Tupel jedoch eine festgelegte Reihenfolge.*

Beispiel 6.32 (Folge)**.**
Die Abbildung

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto y_n := \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$$

ist eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Standard-Indexmenge $\mathbb{N}$. Kurz wird diese Folge auch als $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet.

§ 6.5 Das Auswahlaxiom

Das **Auswahlaxiom** (englisch: axiom of choice) der axiomatischen Mengenlehre besagt: Ist $\mathcal{U}$ eine Menge von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Funktion $F \colon \mathcal{U} \to \bigcup \mathcal{U}$, sodass gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U} \; \big(F(U) \in U\big).$$

Eine solche Funktion F heißt **Auswahlfunktion** (englisch: choice function) für $\mathcal{U}$, weil sie aus jedem Element U von $\mathcal{U}$ irgendein Element auswählt. Das Auswahlaxiom besagt also, dass es möglich ist, aus jedem Element von $\mathcal{U}$ ein Element auszuwählen, selbst wenn $\mathcal{U}$ überabzählbar viele Mengen als Elemente enthält und man daher nicht in der Lage ist, ein Verfahren anzugeben, nach dem die Auswahl geschehen soll.

Das Auswahlaxiom ist kein fester Bestandteil der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel, sondern es kann dazugenommen werden oder auch nicht.[49] Es wird aber wohl von den meisten Mathematiker:innen akzeptiert. In Fällen, in denen $\mathcal{U}$ nur endlich viele Mengen enthält, wird das Auswahlaxiom nicht benötigt, weil seine Aussage bereits aus den anderen Axiomen folgt. Wir werden in der Vorlesung darauf hinweisen, wenn ein Resultat von der Hinzunahme des Auswahlaxioms abhängt. Einige Beispiele folgen bereits in diesem Abschnitt, siehe Satz 6.35.

Definition 6.33 (allgemeines kartesisches Produkt)**.**
Es sei I eine nichtleere Indexmenge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist das ***kartesische Produkt*** *(englisch: Cartesian product) dieser Familie von Mengen gegeben durch*

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \Big\{ F \colon I \to \bigcup_{i=I} A_i \;\Big|\; F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \Big\}. \tag{6.10}$$

[49] Man spricht von den ZF-Axiomen (ohne das Auswahlaxiom) und von den ZFC-Axiomen (mit Auswahlaxiom).

Das kartesische Produkt einer Familie von Mengen besteht also aus *Funktionen* auf der Indexmenge I, deren Funktionswerte jeweils im richtigen Faktor liegen.

Bemerkung 6.34 (Allgemeine kartesische Produkte)**.**
Das ***kartesische Produkt*** *hatten wir bisher nur für endlich viele Mengen definiert, siehe Definition 4.8. Die allgemeine Definition 6.33 erfordert den Funktionenbegriff, der nun zur Verfügung steht. Die Definition 6.33 lässt sich als Verallgemeinerung der Definition 4.8 verstehen: Ist nämlich die Indexmenge $I = [\![1, n]\!]$, so ist $\bigtimes_{i \in I} A_i$ nach (6.10) die Menge aller n-elementigen Folgen. Wenn wir eine solche endliche Folge gemäß der natürlichen Kleiner-Gleich-Ordnung der Indexmenge I als n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ schreiben, so haben wir ein Element aus $\bigtimes_{i \in I} A_i$ gemäß Definition 4.8. Diese Zuordnung ist bijektiv.*

Wenn alle Mengen $A_i = A$ sind, so schreiben wir statt $\bigtimes_{i \in I} A$ auch A^I. Es ist also beispielsweise

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad & \textit{die Menge aller Folgen mit Werten in } \mathbb{R}, \\ \{0,1\}^A \quad & \textit{die Menge aller } \{0,1\}\textit{-wertigen (binären) Funktionen auf einer Menge } A. \end{aligned}$$

*Letztere wird manchmal als Schreibweise für die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ verwendet. (**Quizfrage 6.4:** Inwiefern ist diese Schreibweise gerechtfertigt?)*

Das Auswahlaxiom hat eine ganze Menge äquivalenter, teilweise überraschender Charakterisierungen, von denen der nächste Satz (ohne Beweis) einige angibt.

Satz 6.35 (zum Auswahlaxiom äquivalente Aussagen)**.**
Folgende Aussagen sind in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel äquivalent:

(*i*) *Es gilt das Auswahlaxiom.*

(*ii*) *Ist I eine beliebige Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, so ist das kartesische Produkt $\bigtimes_{i \in I} A_i$ eine nichtleere Menge.*

(*iii*) *Jede Äquivalenzrelation besitzt ein vollständiges Repräsentantensystem.*

(*iv*) *Es sei $f: X \to Y$ eine beliebige Funktion. Dann sind äquivalent:*

   (*a*) *f ist surjektiv.*

   (*b*) *Es existiert eine Abbildung $h: Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. Eine solche Abbildung heißt eine* ***Rechtsinverse*** *(englisch: right inverse) von f. Sie ist notwendig injektiv.*

(*v*) *Es gilt das Lemma von Zorn 6.36.*

Lemma 6.36 (Lemma von Zorn)**.**
Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge. Weiter besitze jede totalgeordnete Teilmenge $A \subseteq X$ eine obere Schranke in X. Dann existiert in X ein maximales Element.

Wir werden das Auswahlaxiom in Gestalt des Lemmas von Zorn 6.36 später noch verwenden. Wie angekündigt werden wir darauf hinweisen, wenn ein Resultat von der Hinzunahme des Auswahlaxioms oder der Verwendung eines zu ihm äquivalenten Resultats abhängt.

Die Schwierigkeiten in der intuitiven Erfassung des Auswahlaxioms und des äquivalenten Lemmas von Zorn 6.36 (sowie des ebenfalls äquivalenten Wohlordnungssatzes (englisch: well-ordering theorem), den wir hier nicht angeben) werden in folgendem Zitat gut erfasst, das von dem Mathematiker Jerry Lloyd Bona stammt:

The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering theorem is obviously false; and who can tell about Zorn's Lemma?

Ende der Woche 3

Das griechische Alphabet

Kleinbuchstabe	Großbuchstabe	Name
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ, ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	theta
ι	I	iota
κ, $\varkappa$	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omikron
π, ϖ	Π	pi
ρ, ϱ	P	rho
σ, ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	ypsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
bzgl.	bezüglich
etc.	et cetera
i. A.	im Allgemeinen
i. d. R.	in der Regel
i. W.	im Wesentlichen
o. B. d. A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
usw.	und so weiter
vgl.	vergleiche

Index

Literatur

Deiser, O. (2022a). *Einführung in die Mengenlehre*. URL: https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=mengenlehre1.
– (2022b). *Grundbegriffe der Mathematik*. URL: https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=grundbegriffe.
Magnus, P. D.; T. Button; J. R. Loftis; R. Trueman; A. Thomas-Bolduc; R. Zach; S. Wimmer (2023). *forall x: Dortmund. Eine Einführung in die formale Logik*. URL: https://github.com/sbwimmer/forallx-do.
Thiele, R. (1979). *Mathematische Beweise*. Bd. 99. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. URL: https://mathematikalpha.de/?smd_process_download=1&download_id=26662.