Plenarübung Lineare Algebra I

Link zu diesen Folien

Themen heute

(1) Komplexe Zahlen
   (1) Motivation
   (2) Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
   (3) Körperverknüpfungen in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
   (4) Grundlegende Begriffe in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
   (5) „Eindeutigkeit“ von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
   (6) Komplexe Zahlen als Vektorraum
   (7) Identifikation mit $\mathbb{R}_2$
   (8) Komplexe Einheitswurzeln
(2) Themenwiederholung
   (1) Rückblick auf die vergangenen Wochen
   (2) Vektorraumstruktur und Ordnung
   (3) Extremalkonzepte revisited
   (4) Polynomnullstellen über dem Körper $(\mathbb{R}^2, +, \tilde{\cdot})$
   (5) Substruktur einer Einheitssphäre

Komplexe Zahlen - Motivation

Der Startpunkt

Mit natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ können wir Objekte zählen.
Addition und Multiplikation sind assoziative Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$.

Folgende Gleichungstypen wollen wir aber lösen können:

(1) $2 + x = 2$

(2) $2 + x = 1$

(3) $2\,x = 1$

(4) $x^2 = 2$

(5) $x^2 = -1$

Komplexe Zahlen als Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Erweiterung

Wir fügen zu $\mathbb{R}$ das freie Element i hinzu und legen nur $i^2 = -1$ fest.

Die beliebige Verknüpfung von i mit Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ und sich selbst erzeugt nun die (formalen) Elemente

Damit für diese Verknüpfungen dieser Objekte Assoziativität, Kommutativität und Distributivität weiter gelten, muss

sein. Es verbleibt gerade die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} :=$$

Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$

Auf $\mathbb{C}$ definieren wir die Erweiterungen der Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ als:

$$+, \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(a + bi) + (c + di) :=$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) :=$$

Körpereigenschaft von $\mathbb{C}$

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis. (Skizze)

(1) Assoziativität von $+$ und $\cdot$

(2) Neutrale Elemente bzgl. $+$ und $\cdot$

(3) Inverse Elemente zu $z := a + bi$ bzgl. $+$ und $\cdot$

(4) Kommutativität für $+$ und $\cdot$

(5) Distributivgesetze

Grundlegende Begriffe in den komplexen Zahlen

Lemma/Definition

Es seien $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der Körper der komplexen Zahlen.

(1) Die Abbildung $a + bi =: z \mapsto \overline{z} := a - bi$ ist ein Körperautomorphismus. Das Bildelement $\overline{z}$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

(2) Für $z = a + bi$ heißt $a =: \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ der **Realteil** und $b =: \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ der **Imaginärteil**. Dann ist

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + b\,i + a - b\,i}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$$
$$\frac{z - \overline{z}}{2\,i} = \frac{a + b\,i - a + b\,i}{2\,i} = b = \mathrm{Im}(z).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist eind. $\mathbb{R}$-Erweiterung mit Lösung von $x^2 = -1$

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist die bis auf Isomorphie eindeutige Körpererweiterung von $(R, +, \cdot)$, in der $x^2 + 1$ eine Nullstelle hat.

Beweis. (Skizze)

(1)

(2)

(1) und (2) $\Rightarrow$

Komplexe Zahlen als Vektorraum

Da $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, bildet $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Vektorraum über jedem seiner Unterkörper.

Also bspw. ´

(1) über $\mathbb{C}$

(2) über $\mathbb{R}$

(3) über $\mathbb{Q}$

Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}_2$

Lemma

Die Abbildung $\mathbb{C} \ni a + bi \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}_2$ ist

(1) ein Gruppenisomorphismus zwischen den abelschen Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ und $(\mathbb{R}_2, +)$,

(2) ein Vektorraumisomorphismus zwischen den Vektorräumen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

(3) ein Körperisomorphismus zwischen den Körpern $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_2, +, \tilde{\cdot})$, wobei

$$(a, b) \,\tilde{\cdot}\, (c, d) :=$$

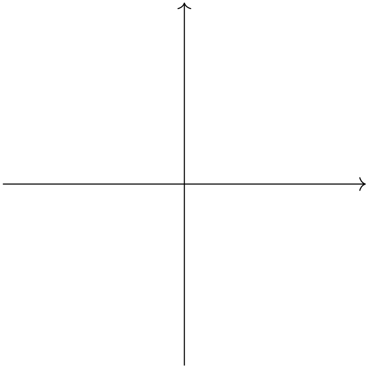
Visualisierung der bisherigen Konzepte

(1) Addition $(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i$

(2) Konjugation $\overline{a+bi} := a-bi$

(3) Realteil $\operatorname{Re}(a+bi) := a$, Imaginärteil $\operatorname{Im}(a+bi) := b$

(4) skalare Multiplikation mit $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot (a+bi) = xa + xbi$



Visualisierung der bisherigen Konzepte 2 (Multiplikation)

Polardarstellung komplexer Zahlen

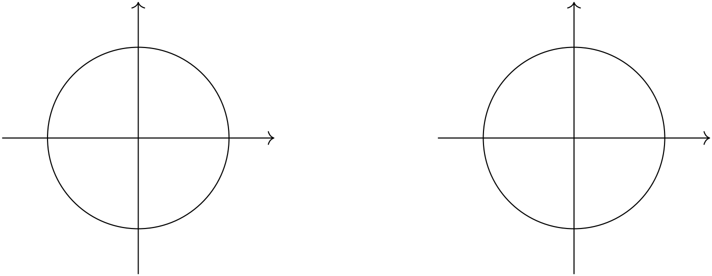
(1) $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ heißt komplexe **Exponentialfunktion**

(2) **Sinus** und **Kosinus** für $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{xi})$,$\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{xi})$

(3) $(0,\infty) \times [0,2\pi) \ni \ (r,\varphi) \mapsto r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) \ \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist Bijektion

(4) Eigenschaften von Sinus und Kosinus (Additionstheoreme) liefern

$$r_1\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\big) \cdot r_2\big(\cos(\psi) + \sin(\psi)i\big) = r_1 r_2\big(\cos(\varphi+\psi) + \sin(\varphi+\psi)i\big)$$



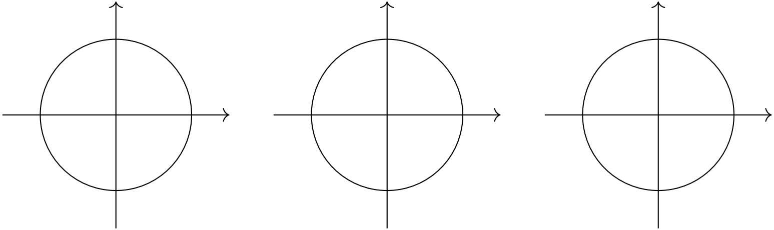
n-te Einheitswurzeln

Es sei $n \in \mathbb{N}$. In $\mathbb{C}$ gibt es genau n Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1,$$

nämlich

$$z_i = \qquad\qquad k = 0, \dots, n-1$$



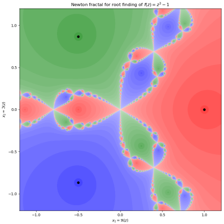
Exkurs Newton Fraktale

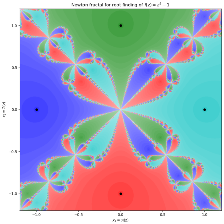
Nullstellensuche mit dem Newton-Verfahren

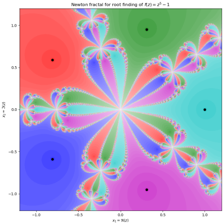
Für glattes $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man lokal Nullstellen mit Hilfe des **Newton-Verfahrens** bestimmen, einem iterativen Verfahren der Form

$$z^{(k+1)} := z^{(k)} - F'(z^{(k)})^{-1} F(z^{(k)})$$

Für $F(z) := z^n - 1$ ergeben sich Newton-Fraktale:







Weihnachtsrückblick

Geordnete Vektorräume

Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$ und $(V, \preccurlyeq)$ eine teilgeordnete Menge. Der Raum $(V, +, \cdot)$ mit $\preccurlyeq$ heißt **geordneter Vektorraum**, wenn für $x, y \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} x \preccurlyeq y \Rightarrow \quad & x + z \preccurlyeq y + z && \forall z \in V \\ x \preccurlyeq y \Rightarrow \quad & \alpha x \preccurlyeq \alpha y && \forall \alpha \in K \end{aligned}$$

Welche der folgenden Beispiele sind geordnete Vektorräume?

(1) $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $x \preccurlyeq y :\Leftrightarrow x_3 \leq y_4$

(2) $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f \preccurlyeq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$

(3) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, $A \preccurlyeq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$

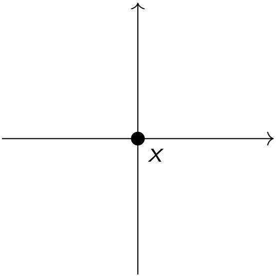
(4) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $x \preccurlyeq y :\Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)$

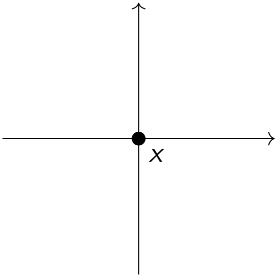
Vergleichbarkeit bzgl. zweier Ordnungsrelationen

Wie sehen die Mengen $\{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, x\mathbb{R}_{1/2}y\}$ und $\{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, y\mathbb{R}_{1/2}x\}$ bzgl.

$$R_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$
$$R_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 < y_1) \wedge |x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_1|\}$$

für ein festes $x \in \mathbb{R}^2$ aus?





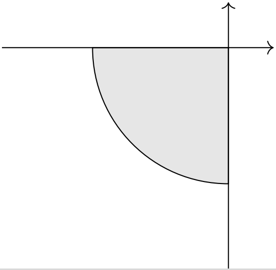
Extremalkonzepte im $\mathbb{R}^2$

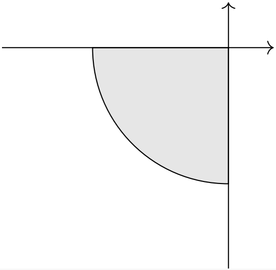
Bestimmen Sie Infimum/Supremum, Minimum/Maximum und minimale/maximale Elemente der Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$$

bzgl. der Ordnungsrelationen

$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$
$$R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 < y_1) \wedge y_2 \leq x_2 + |x_1 - y_1|\}$$





Polynome in $(\mathbb{R}^2[t], +, \tilde{\cdot})$

Welche Nullstellen besitzt das Polynom $t^2 + 1$ aus $(\mathbb{R}^2[t], +, \tilde{\cdot})$, wobei

$$x \tilde{\cdot} y := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)?$$

Produkte auf dem Einheitskreis

Es sei $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der Körper der reellen Zahlen. Welche Struktur hat

$$S := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\}$$

mit „$\cdot$"?

(1) Halbgruppe

(2) Monoid

(3) Gruppe

(cc) (by) (nc) (sa)