Plenarübung Lineare Algebra I

Link zu diesen Folien

Themen heute

1. Komplexe Zahlen
   1. Motivation
   2. Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
   3. Körperverknüpfungen in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
   4. Grundlegende Begriffe in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
   5. „Eindeutigkeit“ von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
   6. Komplexe Zahlen als Vektorraum
   7. Identifikation mit $\mathbb{R}_2$
   8. Komplexe Einheitswurzeln
2. Themenwiederholung
   1. Rückblick auf die vergangenen Wochen
   2. Vektorraumstruktur und Ordnung
   3. Extremalkonzepte revisited
   4. Polynomnullstellen über dem Körper $(\mathbb{R}^2, +, \tilde{\cdot})$
   5. Substruktur einer Einheitssphäre

Komplexe Zahlen - Motivation

Der Startpunkt

Mit natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ können wir Objekte zählen. Addition und Multiplikation sind assoziative Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$.

Folgende Gleichungstypen wollen wir aber lösen können:

(1) $2 + x = 2$ Kein additives neutrales Element $\rightsquigarrow \mathbb{N}_0$

(2) $2 + x = 1$ Keine additiv Inversen $\rightsquigarrow \mathbb{Z}$

Erste Körper

(3) $2x = 1$ Keine multiplikativ Inversen $\rightsquigarrow \tilde{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ (Äquivalenzkl. von Brüchen)

größte Erweiterung

(4) $x^2 = 2$ Nicht alle "pos. Wurzeln", nicht jede Menge hat Supremum, nicht jede Cauchy-Folge konvergiert $\rightsquigarrow \mathbb{R}$ (Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen)

(5) $x^2 = -1$ Nicht alle "neg. Wurzeln", Nicht jede polynomielle Gleichung hat eine Lösung

Plan: $\mathbb{R}$ um Lösung von $x^2 = -1$ erweitern

Komplexe Zahlen als Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Erweiterung

Wir fügen zu $\mathbb{R}$ das freie Element i hinzu und legen nur $i^2 = -1$ fest.

Die beliebige Verknüpfung von i mit Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ und sich selbst erzeugt nun die (formalen) Elemente

$a, i, bi, a+i, \sum_{k=0}^{n} a_k i^k, \ldots$ (wie bei der Konstruktion von Polynomen als Ringerweiterung)

Damit für diese Verknüpfungen dieser Objekte Assoziativität, Kommutativität und Distributivität weiter gelten, muss

$$a+i = i+a, \quad bi = ib, \quad bi + di^3 = (b-d)i$$

sein. Es verbleibt gerade die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$

Auf $\mathbb{C}$ definieren wir die Erweiterungen der Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ als:

$$+,\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

$$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$-1 \hat{=}\, i^2$

Motivation ist: Distributivgesetz / Polynomaddition und -multiplikation

Bleibt die Frage: Ist $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ein Körper?

Körpereigenschaft von $\mathbb{C}$

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis. (Skizze)

(1) Assoziativität von $+$ und $\cdot$ wird vererbt

(2) Neutrale Elemente bzgl. $+$ und $\cdot$ sind $0+0i$ und $1+0i$ (aus $\mathbb{R}$ vererbt)

(3) Inverse Elemente zu $z := a + bi$ bzgl. $+$ und $\cdot$ sind die Elemente

$-z = (-a)+(-b)i$ und z^{-1} für $z \neq 0+0i$ mit $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

Denn: $z \cdot z^{-1} = (a+bi) \cdot (\quad) = \underbrace{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}_{1} + \underbrace{\frac{ab-ab}{a^2+b^2}}_{0} i = 1+0i$

(4) Kommutativität für $+$ und $\cdot$

wird vererbt

(5) Distributivgesetze

Prüft man leicht nach (Schreibarbeit)

$\square$

Und: $\{x+0i \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist als Unterkörper isomorph zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Grundlegende Begriffe in den komplexen Zahlen

Lemma/Definition

Es seien $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der Körper der komplexen Zahlen.

(1) Die Abbildung $a + bi =: z \mapsto \overline{z} := a - bi$ ist ein Körperautomorphismus. Das Bildelement $\overline{z}$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

(2) Für $z = a + bi$ heißt $a =: \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ der **Realteil** und $b =: \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ der **Imaginärteil**. Dann ist

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+bi+a-bi}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+bi-a+bi}{2i} = b = \mathrm{Im}(z).$$

Insbesondere ist $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\mathrm{Ker}(\mathrm{Re}) = \{0+bi \mid b \in \mathbb{R}\}$

Re/Im sind keine Körperhomomorphismen (Multiplikativität fehlt) ...

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist eind. $\mathbb{R}$-Erweiterung mit Lösung von $x^2 = -1$

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist die bis auf Isomorphie eindeutige Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, in der $x^2 + 1$ eine Nullstelle hat.

Beweis. (Skizze)

(1) $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, d.h., jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[t]$ hat eine Nullstelle. (Fundamentalsatz)

(2) $\mathbb{C}$ ist algebraische Erweiterung von $\mathbb{R}$, d.h., Körpererweiterung in der jedes Element $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines Polynoms aus $\mathbb{R}[t]$ ist

nämlich z.B. $(t - z) \cdot (t - \bar{z}) \in \mathbb{R}[t]$

Ganze Menge Arbeit

(1) und (2) $\Rightarrow$

$\mathbb{C}$ ist bis auf Isomorphie eindeutige algebraisch Abschluss von $\mathbb{R}$

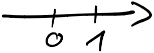
$\square$

Hinweis: Es gibt auch andere Konstruktionen der komplexen Zahlen, z.B. als $\mathbb{R}[t]/\langle t^2+1 \rangle \leftarrow$ Faktorring, braucht Ideale

Da $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, bildet $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Vektorraum über jedem seiner Unterkörper.

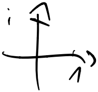
Also bspw.

(1) über $\mathbb{C}$ — $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, denn $\{1\}$ ist Basis (wie bei jedem Körper über sich selbst)



Achtung, nicht geordnet

(2) über $\mathbb{R}$ — $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, denn $\{1, i\}$ ist Basis



Körpererweiterung vom Grad 2 / Quadratische Erweiterung

(3) über $\mathbb{Q}$ — $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$, weil schon $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

(mehr dazu nächste Woche)

Lemma

Die Abbildung $\mathbb{C} \ni \overbrace{a + bi \mapsto (a, b)}^{f:=} \in \mathbb{R}_2$ ist

(1) ein Gruppenisomorphismus zwischen den abelschen Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ und $(\mathbb{R}_2, +)$,

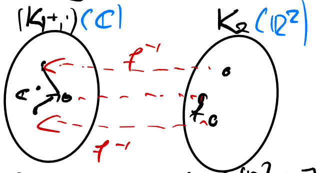
(2) ein Vektorraumisomorphismus zwischen den Vektorräumen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

(3) ein Körperisomorphismus zwischen den Körpern $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_2, +, \tilde{\cdot})$, wobei

$$(a, b)\,\tilde{\cdot}\,(c, d) := \underbrace{(ac - bd, ad + bc)}$$

So lassen sich Bijektionen immer zu Isomorphismen ergänzen

$$f(f^{-1}(a,b) \underset{\text{in } \mathbb{C}}{\cdot} f^{-1}(c,d))$$



Kommentar: Rannacher (Analysis) führt die komplexen Zahlen gerade als $(\mathbb{R}^2, +, \tilde{\cdot})$ ein

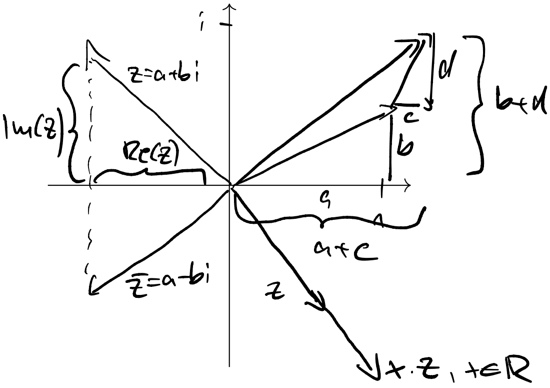
Visualisierung der bisherigen Konzepte

(1) Addition $(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i$

(2) Konjugation $\overline{a+bi} := a-bi$

(3) Realteil $\mathrm{Re}(a+bi) := a$, Imaginärteil $\mathrm{Im}(a+bi) := b$

(4) skalare Multiplikation mit $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot (a+bi) = xa + xbi$



Polardarstellung komplexer Zahlen

(Achtung: Nichtlineare Transformation)
Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist das absolut konvergent

(1) $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ heißt komplexe **Exponentialfunktion**

(2) **Sinus** und **Kosinus** für $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{xi})$, $\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{xi})$

(3) $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \ni (r, \varphi) \mapsto r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist Bijektion

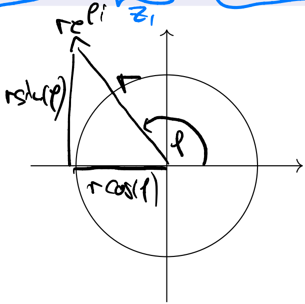
(4) Eigenschaften von Sinus und Kosinus (Additionstheoreme) liefern

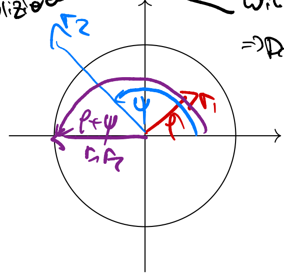
$$\underbrace{r_1(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)}_{z_1 \,=\, re^{\varphi i}} \cdot \underbrace{r_2(\cos(\psi) + \sin(\psi)i)}_{z_2} = r_1 r_2(\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)i)$$

Beträge multiplizieren

Winkeladdition

$\Rightarrow$ Drehstreckung





Komplexe Einheitswurzeln

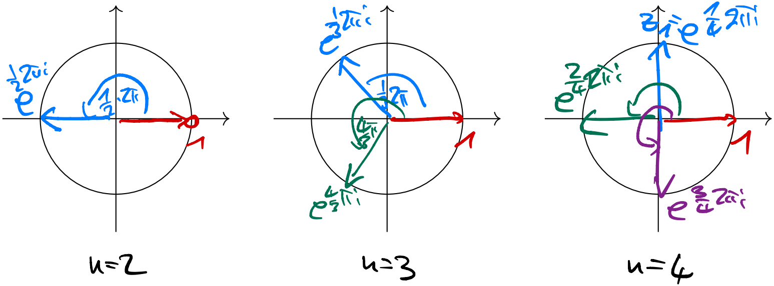
n-te Einheitswurzeln

Es sei $n \in \mathbb{N}$. In $\mathbb{C}$ gibt es genau n Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1,$$

nämlich

$$z_i = e^{\frac{k}{n} 2\pi i} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

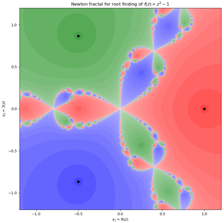


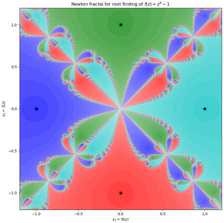
Nullstellensuche mit dem Newton-Verfahren

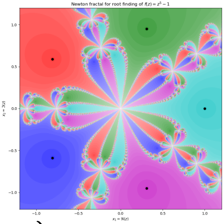
Für glattes $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man lokal Nullstellen mit Hilfe des **Newton-Verfahrens** bestimmen, einem iterativen Verfahren der Form

$$z^{(k+1)} := z^{(k)} - F'(z^{(k)})^{-1} F(z^{(k)})$$

Für $F(z) := z^n - 1$ ergeben sich Newton-Fraktale:



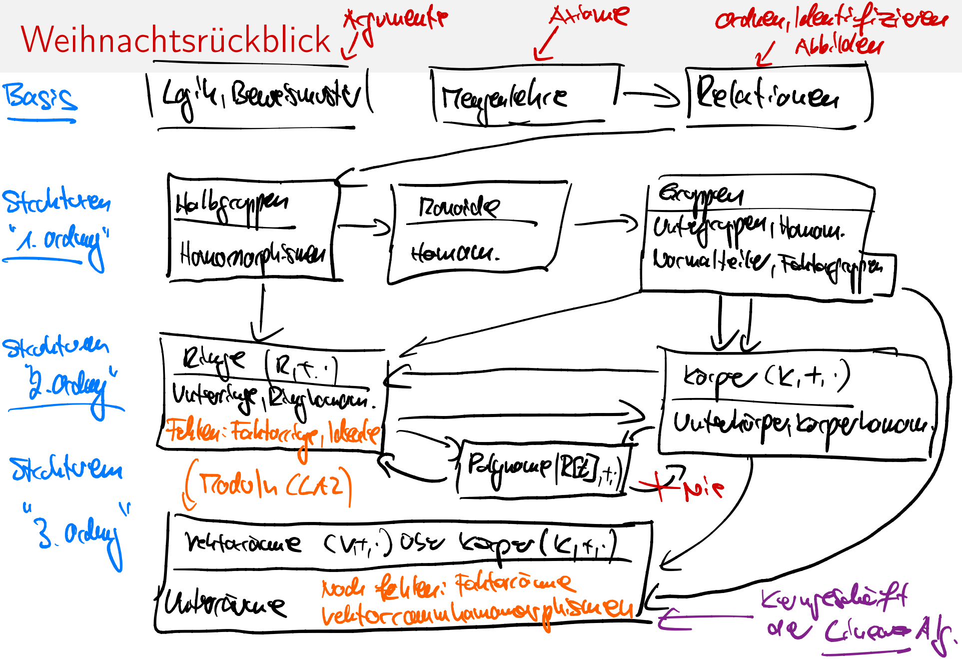




Farben liefern den Grenzwert der Folge (welche Nullstelle).

Intensität gibt benötigten Iterationen

Weihnachtsrückblick



Geordnete Vektorräume

Definition

total geordneten

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem total geordneten Körper $(K, +, \cdot)$ und $(V, \preccurlyeq)$ eine teilgeordnete Menge. Der Raum $(V, +, \cdot)$ mit $\preccurlyeq$ heißt **geordneter Vektorraum**, wenn für $x, y \in V$ gilt:

$$x \preccurlyeq y \Rightarrow \quad x + z \preccurlyeq y + z \qquad \forall z \in V$$

$$x \preccurlyeq y \Rightarrow \quad \alpha x \preccurlyeq \alpha y \qquad \forall \alpha \in K_{>0}$$

Welche der folgenden Beispiele sind geordnete Vektorräume?

(1) $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $x \preccurlyeq y :\Leftrightarrow x_3 \leq y_4$

Nein, nichtmal eine p. Ordnung, denn $(0,0,1,1,0)$ und $(1,0,1,1,0)$ sind unvergleichbar

(2) $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f \preccurlyeq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$

Ja, da $\mathbb{R}$ Körper und alle Operationen und Vergleiche sind punktweise

(3) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, $A \preccurlyeq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$

Nein, zwar Ordnung aber $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ aber $\mathbb{Z} \triangle \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \not\subseteq \emptyset = \mathbb{R} \triangle \mathbb{R}$

(4) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $x \preccurlyeq y :\Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)$

Ja

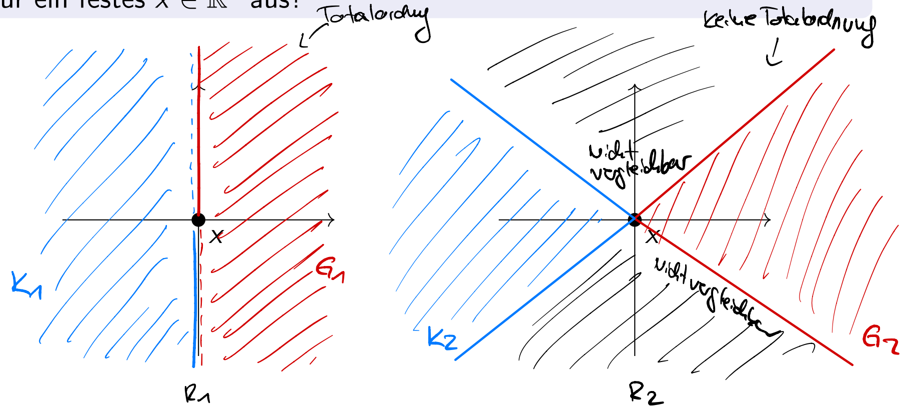
Vergleichbarkeit bzgl. zweier Ordnungsrelationen

Wie sehen die Mengen $\underbrace{\{y \in \mathbb{R}^2 \mid x\mathbb{R}_{1/2}y\}}_{G_{1/2}:=}$ und $\underbrace{\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y\mathbb{R}_{1/2}x\}}_{K_{1/2}:=}$ bzgl.

$$R_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$

$$R_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \wedge |x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_1|\}$$

für ein festes $x \in \mathbb{R}^2$ aus?



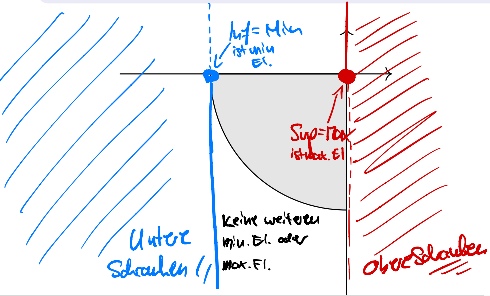
Extremalkonzepte im $\mathbb{R}^2$

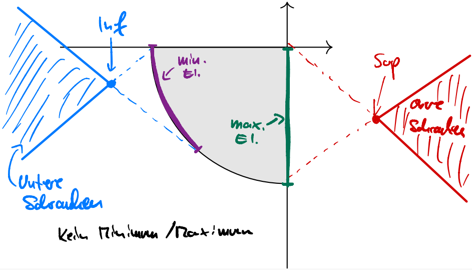
Bestimmen Sie Infimum/Supremum, Minimum/Maximum und minimale/maximale Elemente der Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$$

bzgl. der Ordnungsrelationen

$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$
$$R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \wedge y_2 \leq x_2 + |x_1 - y_1|\}$$





Polynome in $(\mathbb{R}^2[t], +, \tilde{\cdot})$

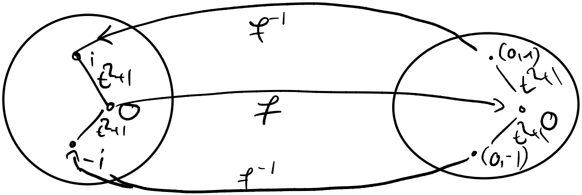
Welche Nullstellen besitzt das Polynom $t^2 + 1$ aus $(\mathbb{R}^2[t], +, \tilde{\cdot})$, wobei

$$x \tilde{\cdot} y := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)?$$

Es besitzt natürlich nur die Nullstellen $(0,1)$ und $(0,-1)$, denn $(\mathbb{R}^2[t], +, \tilde{\cdot})$ ist ja isomorph zu $(\mathbb{C}[t], +, \cdot)$ und

$(0,1) \mathrel{\hat{=}} i \qquad (0,-1) \mathrel{\hat{=}} -i$ ← Nullstellen von t^2+1 in $(\mathbb{C}[t], +, \cdot)$

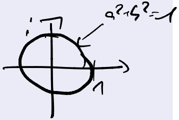
In isomorphen Strukturen kann man stellvertretend rechnen!



Produkte auf dem Einheitskreis

Es sei $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der Körper der reellen Zahlen. Welche Struktur hat

$$S := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\}$$



mit „$\cdot$“?

(1) Halbgruppe ✓ Assoziativität wird vererbt, innere Verknüpfung weil Radien multipliziert werden (bleiben erhalten)

(2) Monoid ✓ Neutrales Element ist $1+0i \in S$

(3) Gruppe ✓ Inverse Elemente sind $a-bi$ mit $a^2+(-b)^2=a^2+b^2=1$

$\rightsquigarrow$ Untergruppe von $\mathbb{C}$