Lineare Algebra I

Woche 14

05.02.2024 und 07.02.2024

Einleitende Fragen

Die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ hängt von den gewählten Basen B_V und B_W ab.

1. Wie transformiert sich A, wenn wir die Basen in V und/oder W wechseln?
2. In welcher Basis hat A besonders einfache Gestalt?

Dazu müssen wir zunächst klären, wie sich Koordinatenvektoren bei Wechsel der Basis transformieren.

Basiswechselmatrix

Definition 20.1

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_n)$.

Dann heißt

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} := \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\mathrm{id}_V) \in K^{n \times n}$$

die **Basiswechselmatrix von B_V nach $\widehat{B}_V$**.

Basiswechselmatrix

Beispiel 20.2

Wir betrachten den Polynomraum $V = \mathbb{R}_2[t]$ mit

- „alter“ Basis $B_V = (1,\ t,\ t^2)$
- „neuer“ Basis $\widehat{B}_V = (t^2 - t + 1,\ t^2 + 3,\ t + 1)$

Lemma 20.3

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ bzw. $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$. Dann gilt:

1. Ist $x \in K^n$ der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. der Basis B_V, dann ist $\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} x$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\widehat{B}_V$.
2. Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} \in K^{n \times n}$ ist invertierbar.
3. $\left(\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}\right)^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$.
4. Die von der Matrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ induzierte lineare Abbildung $K^n \to K^n$ ist $\Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ \Phi_{B_V} \in \operatorname{Aut}(K^n)$.

Eigenschaften von Transformationsmatrizen in K^n

Folgerung 20.4

Im Fall $V = K^n$ gilt

$$\mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{(e_1,\ldots,e_n)} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \widehat{v}_1 & \cdots & \widehat{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{T}^{B_V}_{(e_1,\ldots,e_n)} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

und daher

$$\mathcal{T}^{B_V}_{\widehat{B}_V} = \mathcal{T}^{(e_1,\ldots,e_n)}_{\widehat{B}_V} \mathcal{T}^{B_V}_{(e_1,\ldots,e_n)} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \widehat{v}_1 & \cdots & \widehat{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Beispiel 20.5

Gesucht ist die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ von der Basis $B_V = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ zur Basis $\widehat{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Satz 20.6

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K mit Basen B_V und $\widehat{B}_V$ von V sowie Basen B_W und $\widehat{B}_W$ von W.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Homomorphismus $f\colon V \to W$:

$$\mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_W}(f) = \mathcal{T}^{B_W}_{\widehat{B}_W}\, \mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(f)\, \mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{B_V}.$$

Transformation der Darstellungsmatrix

Beispiel 20.7

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ die Darstellungsmatrix } A = \mathcal{M}^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) \text{ von } f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Gesucht ist die Darstellungsmatrix von f in den neuen Basen $\widehat{B}_V = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\widehat{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Äquivalenztransformation

Definition 20.8

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times m}$ heißen **äquivalent**, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = S\, A\, T^{-1}.$$

äquivalente Matrizen

Satz 20.9

Es seien

- $A, \widehat{A} \in K^{n \times m}$
- V und W Vektorräume über dem Körper K mit $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$ und Basen B_V bzw. B_W
- $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind äquivalente Matrizen.
2. $\widehat{A}$ ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. geeigneter Basen $\widehat{B}_V$, $\widehat{B}_W$.
3. Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(\widehat{A})$.

äquivalente Matrizen

Bemerkung 20.10

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(V,W) \arrow[r, "\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}", "\text{isomorph}"'] \arrow[d, "\pi"'] & K^{n\times m} \arrow[d, "\pi"] \\
\operatorname{Hom}(V,W) \,/\, \sim_{\text{Rang}} \arrow[r, "\text{bijektiv}", "\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}"'] & K^{n\times m} \,/\, \sim_{\text{Rang}}
\end{tikzcd}
$$

äquivalente Matrizen

Folgerung 20.11

Es sei $A \in K^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$. Dann ist A äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \in K^{n \times m}.$$

Diese Matrix heißt die **Rang-Normalform** von A.

Transform. der Darstellungsmatrix eines Endomorphismus

Satz 20.12

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit Basen B_V und $\widehat{B}_V$.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $f\colon V \to V$:

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}\,\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)\,\mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}.$$

Ähnlichkeitstransformation

Definition 20.13

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times m}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T\,A\,T^{-1}.$$

Satz 20.14

Es seien

- $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$
- V Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und Basis B_V
- $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind ähnliche Matrizen.
2. $\widehat{A}$ ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer geeigneten Basis $\widehat{B}_V$.

f-invarianter Unterraum

Definition 20.15

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

   Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt ein **f-invarianter Unterraum**, wenn gilt:
   $$f(U) \subseteq U.$$

2. Es $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Unterraum $U \subseteq K^n$ heißt ein **A-invarianter Unterraum**, wenn gilt:
   $$f_A(U) \subseteq U.$$

f-invariante Unterraum

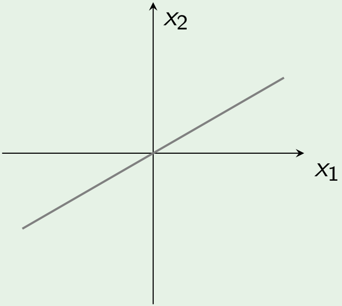
Beispiel 20.16

1. In jedem Vektorraum V sind die trivialen Unterräume $\{0\}$ und V invariante Unterräume für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$.

f-invarianter Unterraum

Beispiel 20.16

2. Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in $\mathbb{R}^2$ hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume:



Beispiel 20.16

3. Für die Ableitungsabbildung als Endomorphismus $f \colon K[t] \to K[t]$ sind die invarianten Unterräume genau die Unterräume von der Form $\langle 1, t, t^2, \ldots, t^k \rangle = K_k[t]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. der Nullraum.

Was bringen f-invariante Unterräume?

- V sei endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \geqslant 2$
- $f\colon V \to V$ sei ein Endomorphismus
- $U \subseteq V$ sei ein f-invarianter Unterraum mit $\dim(U) = k$ und $1 \leqslant k \leqslant n-1$ und $W \subseteq V$ ein zu U komplementärer Unterraum

Bezüglich einer Basis der Form $B_V = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ hat f die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \text{ oder sogar } \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Wie finden wir eine möglichst einfache Darstellungmatrix?

Finde möglichst niedrig-dimensionale, paarweise verschiedene f-invariante Unterräume von V, deren direkte Summe den ganzen Raum V ergibt!

Wie finden wir eine möglichst einfache Darstellungmatrix?

Satz 20.17

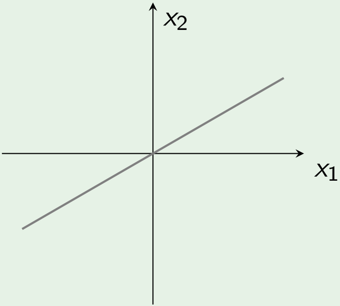
Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Dann sind äquivalent:

1. Es existieren f-invariante Unterräume $U_1, \ldots, U_N$ der Dimensionen $\dim(U_j) = n_j \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt:
$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_L.$$
2. Es existiert eine Basis B_V von V, sodass die Darstellungsmatrix von f **Blockdiagonalgestalt** hat:
$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Wie finden wir eine möglichst einfache Darstellungmatrix?

Beispiel 20.18

Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in $\mathbb{R}^2$ hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume:



Eigenwert, Eigenvektor eines Endomorphismus

Definition 20.19

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

   Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **des Endomorphismus** f, wenn gilt:

   $$f(v) = \lambda\, v.$$

2. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $n \in \mathbb{N}_0$.

   Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn gilt:

   $$A\, x = \lambda\, x.$$

Eigenpaare von Endomorphismen und Darstellungsmatrizen

Lemma 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ seine Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A.

Weiter gilt:

3. Ist (λ, v) ein Eigenpaar von f, dann ist (λ, x) ein Eigenpaar von A für $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$.
4. Ist (λ, x) ein Eigenpaar von f, dann ist (λ, v) ein Eigenpaar von f für $v = \Phi_{B_V}(x)$.

Eigenpaare ähnlicher Matrizen

Folgerung 20.21

Es sei $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ Matrizen mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn A und $\widehat{A}$ ähnlich sind, dann besitzen sie genau dieselben Eigenwerte.

Die Umkehrung von Folgerung 20.21 gilt nicht!

Beispiel 20.22

Die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzen beide genau die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$, sie sind aber nicht ähnlich zueinander.

Diagonalisierbarkeit

Definition 20.23

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Vektorraumes über K mit $\dim(V) = n$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es f-invariante Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ der Dimension 1 gibt, sodass $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ gilt.
2. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Diagonalisierbarkeit

Satz 20.24

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ seine Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V. Dann sind äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar.
2. V besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.
3. A ist diagonalisierbar.
4. K^n besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Diagonalisierbarkeit

- Genau die diagonalisierbaren Endomorphismen besitzen eine diagonale Darstellungsmatrix.
- Auch im allgemeinen Fall (siehe Lineare Algebra II) spielen Eigenpaare eine wesentliche Rolle.