Lineare Algebra I

Woche 14

08

05.02.2024 und ~~07~~.02.2024

Einleitende Fragen

Die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ hängt von den gewählten Basen B_V und B_W ab.

1. Wie transformiert sich A, wenn wir die Basen in V und/oder W wechseln?
2. In welcher Basis hat A besonders einfache Gestalt?

Dazu müssen wir zunächst klären, wie sich Koordinatenvektoren bei Wechsel der Basis transformieren.

Definition 20.1

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_n)$.

„alte" Basis

Dann heißt

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} := \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\mathrm{id}_V) \in K^{n \times n}$$

„neue" Basis

die **Basiswechselmatrix von B_V nach $\widehat{B}_V$**.

$$\mathrm{id}_V(v_j) = v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \, \hat{v}_i \qquad T_{\hat{B}_V}^{B_V} = (t_{ij})$$

Alte Basis darstellen als LKen der neuen Basis

$$AX = B$$

Beispiel 20.2

Wir betrachten den Polynomraum $V = \mathbb{R}_2[t]$ mit

- „alter“ Basis $B_V = (1,\ t,\ t^2)$
- „neuer“ Basis $\widehat{B}_V = (t^2 - t + 1,\ t^2 + 3,\ t + 1)$

$$\begin{aligned}
1 &= t_{11}\,(t^2 - t + 1) + t_{21}\,(t^2 + 3) + t_{31}\,(t + 1) \\
t &= t_{12} \quad \text{"} \quad + t_{22} \quad \text{"} \quad + t_{32} \quad \text{"} \\
t^2 &= t_{13} \quad \text{"} \quad + t_{23} \quad \text{"} \quad + t_{33} \quad \text{"}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} t^0 \to \\ t^1 \to \\ t^2 \to \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

$$T_{\widehat{B}_V}^{B_V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften von Transformationsmatrizen

Lemma 20.3

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ bzw. $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$. Dann gilt:

1. Ist $x \in K^n$ der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. der Basis B_V, dann ist $\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} x$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\widehat{B}_V$.
2. Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} \in K^{n \times n}$ ist invertierbar.
3. $\left(\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}\right)^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$.
4. Die von der Matrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ induzierte lineare Abbildung $K^n \to K^n$ ist $\Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ \Phi_{B_V} \in \operatorname{Aut}(K^n)$.

Koord. $\mapsto$ Vektor $\mapsto$ Koord.

Folgerung 20.4

Im Fall $V = K^n$ gilt

$$\mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{(e_1,\ldots,e_n)} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \widehat{v}_1 & \cdots & \widehat{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{T}^{B_V}_{(e_1,\ldots,e_n)} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

und daher

$$\mathcal{T}^{B_V}_{\widehat{B}_V} = \underbrace{\mathcal{T}^{(e_1,\ldots,e_n)}_{\widehat{B}_V} \mathcal{T}^{B_V}_{(e_1,\ldots,e_n)}}_{\text{Komposition von Darstellungsmatrizen von } \mathrm{id}_{K^n} \circ \mathrm{id}_{K^n}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \widehat{v}_1 & \cdots & \widehat{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Beispiel 20.5 $\mathbb{R}^2$

Gesucht ist die Transformationsmatrix $T_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ von der Basis $B_V = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ zur Basis $\widehat{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$$T_{\widehat{B}_V}^{B_V} = T_{\widehat{B}_V}^{(e_1,e_2)} \, T_{(e_1,e_2)}^{B_V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Satz 20.6

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K mit Basen B_V und $\widehat{B}_V$ von V sowie Basen B_W und $\widehat{B}_W$ von W.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Homomorphismus $f\colon V \to W$:

$$\mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_W}(f) = \mathcal{T}^{B_W}_{\widehat{B}_W} \, \overbrace{\mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(f)}^{\text{„alte" Matrix}} \, \mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{B_V}.$$

transformiert alte in neue Koord. vektoren in W

transformiert neue in alte Koord. vektoren in V

$$\hat{A} = S \, A \, T^{-1}$$

nicht-inverse Matrizen $\hat{=}$ alt → neu

Beispiel 20.7

Es sei

$f = f_A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ die Darstellungsmatrix } A = \mathcal{M}^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) \text{ von } f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Gesucht ist die Darstellungsmatrix von f in den neuen Basen $\widehat{B}_V = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\widehat{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$T^{-1} = T^{\widehat{B}_V}_{(e_1,e_2)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widehat{A} = SAT^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$S = T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\widehat{B}_W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition 20.8

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times m}$ heißen **äquivalent**, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = S\,A\,T^{-1}.$$

Äquivalenz ist Äquivalenztransformation,

- reflexiv: $A = \mathrm{id}_n \, A \, \mathrm{id}_m$
- symmetrisch: $\hat{A} = SAT^{-1} \Rightarrow S^{-1}\hat{A}T = A$
- transitiv: $\hat{A} = SAT^{-1}$ und $\hat{\hat{A}} = \hat{S}\hat{A}\hat{T}^{-1}$

$$\hat{\hat{A}} = \hat{S}SAT^{-1}\hat{T}^{-1} = (\hat{S}S)A(\hat{T}T)^{-1}$$

Satz 20.9

Es seien

- $A, \widehat{A} \in K^{n \times m}$
- V und W Vektorräume über dem Körper K mit $\dim(V) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$ und Basen B_V bzw. B_W
- $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

keine Einschränkung: $V = K^m$, $W = K^n$, B_V, B_W Std. basen und $f = f_A$

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind äquivalente Matrizen. $\widehat{A} = SAT^{-1}$
2. $\widehat{A}$ ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. geeigneter Basen $\widehat{B}_V$, $\widehat{B}_W$.
3. Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(\widehat{A})$.

äquivalente Matrizen

Bemerkung 20.10 zu Satz 20.9

komm. Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & A \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(V,W) \arrow[r, "\mathcal{M}^{B_V}_{B_W}", "\text{isomorph}"'] \arrow[d, "\pi"'] & K^{n\times m} \arrow[d, "\pi"] & \\
& \mathrm{Hom}(V,W)/\sim_{\text{Rang}} \arrow[r, "\text{bijektiv}", "\mathcal{M}^{B_V}_{B_W}"'] & K^{n\times m}/\sim_{\text{Rang}} & \\
{[f]} \arrow[rrr, mapsto] & & & {[A]}
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Hom}(V,W)/\sim_{\text{Rang}}$: kein Vektorraum $\qquad$ $K^{n\times m}/\sim_{\text{Rang}}$: kein Vektorraum

$[f] = \{g \in \mathrm{Hom}(V,W) : \mathrm{Rang}(g) = \mathrm{Rang}(f)\}$

$[A] = \{\hat{A} \in K^{n\times m} : \mathrm{Rang}(\hat{A}) = \mathrm{Rang}(A)\}$

Jede Äq.klasse ist eine glatte Mannigfaltigkeit

$\min\{n,m\} + 1 = \# \mathrm{Hom}(V,W)/\sim_{\text{Rang}}$

Folgerung 20.11

Es sei $A \in K^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$. Dann ist A äquivalent zu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad m-r \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ n-r \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \in K^{n \times m}.$$

Diese Matrix heißt die **Rang-Normalform** von A.

Wähle $B_W = (\underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{Basis von Bild}(A)}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_n}_{\text{Auffüllen}})$

Wähle $B_V = (v_1, \dots, v_r, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_m}_{\text{Kern}(A)})$

$v_j \in f^{-1}(\{w_j\})$

Satz 20.12

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K mit Basen B_V und $\widehat{B}_V$.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $f\colon V \to V$:

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}\, \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)\, \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}.$$

$$\hat{A} = T \quad A \quad T^{-1}$$

Ähnlichkeitstransformation

Definition 20.13

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times \cancel{m}\, n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T\, A\, T^{-1}.$$

Ähnlich ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 20.14

Es seien

- $A, \widehat{A} \in K^{n\times n}$
- V Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und Basis B_V
- $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $A = \mathcal{M}^{B_V}_{B_V}(f)$

Das ist wieder Einschränkung, z.B. $V = K^n$, B_V = Std.basis, $f = f_A$

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind ähnliche Matrizen.
2. $\widehat{A}$ ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer geeigneten Basis $\widehat{B}_V$.

Definition 20.15

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus.

   Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt ein **f-invarianter Unterraum**, wenn gilt:

   $f(u) \in U \; \forall u \in U \quad \Leftrightarrow \quad f(U) \subseteq U. \qquad f\big|_U^U$ ist definiert

2. Es $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Unterraum $U \subseteq K^n$ heißt ein **A-invarianter Unterraum**, wenn gilt:

   $$\{Ax \mid x \in U\} \subseteq U \quad \Leftrightarrow \quad f_A(U) \subseteq U.$$

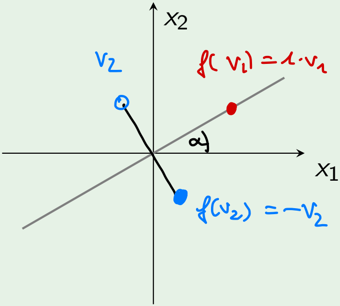
Beispiel 20.16

1. In jedem Vektorraum V sind die trivialen Unterräume $\{0\}$ und V invariante Unterräume für jeden Endomorphismus $f: V \to V$.

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(V) \subseteq V$

Beispiel 20.16

2. Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in $\mathbb{R}^2$ hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume:



$v_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle$

$v_2 \in \left\langle \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right\rangle$

Beispiel 20.16

3. Für die Ableitungsabbildung als Endomorphismus $f \colon K[t] \to K[t]$ sind die invarianten Unterräume genau die Unterräume von der Form $\langle 1, t, t^2, \ldots, t^k \rangle = K_k[t]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. der Nullraum.

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k \qquad \in K_k[t]$$

$$f(p) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + \cdots + \underbrace{k\alpha_k}_{\alpha_k + \cdots + \alpha_k} t^{k-1} \qquad \in K_k[t]$$

Was bringen f-invariante Unterräume?

- V sei endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n \geqslant 2$
- $f\colon V \to V$ sei ein Endomorphismus
- $U \subseteq V$ sei ein f-invarianter Unterraum mit $\dim(U) = k$ und $1 \leqslant k \leqslant n-1$ und $W \subseteq V$ ein zu U komplementärer Unterraum

$\dim(W) = n-k$, $V = U \oplus W$

Bezüglich einer Basis der Form $B_V = (\underbrace{v_1, \ldots, v_k}_{\text{Basis von } U}, \underbrace{v_{k+1}, \ldots, v_n}_{\text{Basis von } W})$ hat f die Darstellungsmatrix

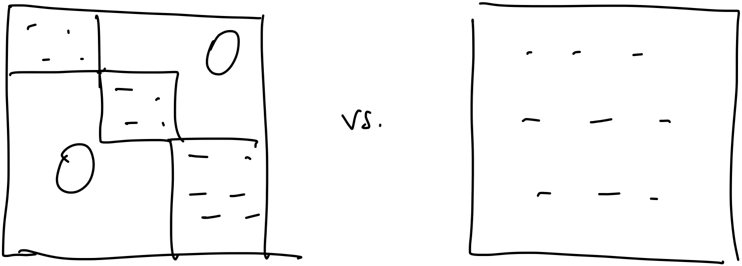
$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{k} & \overbrace{\qquad\quad}^{n-k} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \end{array} \quad \text{oder sogar } \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

f kann zu $f|_U$ eingeschränkt werden

wenn W ebenfalls f-invariant gewählt werden kann

Wie finden wir eine möglichst einfache Darstellungmatrix?

Finde möglichst niedrig-dimensionale, paarweise verschiedene f-invariante Unterräume von V, deren direkte Summe den ganzen Raum V ergibt!



Wie finden wir eine möglichst einfache Darstellungmatrix?

Satz 20.17

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann sind äquivalent:

1. Es existieren f-invariante Unterräume $U_1, \ldots, U_{\cancel{k}}^{L}$ der Dimensionen $\dim(U_j) = n_j \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt:

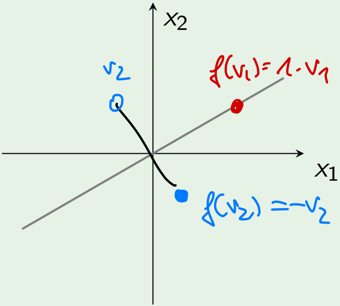
$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_L.$$

2. Es existiert eine Basis B_V von V, sodass die Darstellungsmatrix von f **Blockdiagonalgestalt** hat:

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_L \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & & 0 \\ & \boxed{A_{22}} & \\ 0 & \ddots & \boxed{A_{LL}} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_L \end{array} \end{array}$$

Beispiel 20.18

Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in $\overset{V=}{\mathbb{R}^2}$ hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume:



$$\mathbb{R}^2 = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle$$

$$\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Was sind die 1-dimensionalen f-invarianten Unterräume? $f(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$, d.h. $\boxed{f(v) = \lambda v}$

Eigenwert, Eigenvektor eines Endomorphismus

Definition 20.19

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

   Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **des Endomorphismus** f, wenn gilt:

   $$f(v) = \lambda\, v.$$

   d.h. $\langle v \rangle$ ist f-invarianter UR

2. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $n \in \mathbb{N}_0$.

   Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn gilt:

   $$A\,x = \lambda\, x.$$

Lemma 20.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ seine Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V. Dann sind äquivalent:

d.h. es ex. $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A.

Weiter gilt:

3. Ist (λ, v) ein Eigenpaar von f, dann ist (λ, x) ein Eigenpaar von A für $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$.
4. Ist (λ, x) ein Eigenpaar von f, dann ist (λ, v) ein Eigenpaar von f für $v = \Phi_{B_V}(x)$.

Eigenpaare ähnlicher Matrizen

Folgerung 20.21

Es sei $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ Matrizen mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn A und $\widehat{A}$ ähnlich sind, dann besitzen sie genau dieselben Eigenwerte.

Die Umkehrung von Folgerung 20.21 gilt nicht!

Beispiel 20.22

Die Eigenwerte sagen noch nicht alles über einen Endomorphismus aus!

Die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzen beide genau die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$, sie sind aber nicht ähnlich zueinander.

Diagonalisierbarkeit

Definition 20.23

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Vektorraumes über K mit $\dim(V) = n$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es f-invariante Unterräume $U_1, \dots, U_n$ der Dimension 1 gibt, sodass $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ gilt.
2. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis B_V (aus Eigenvektoren), sodass $\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ ist mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Satz 20.24

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ seine Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V. Dann sind äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar.
2. V besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.
3. A ist diagonalisierbar.
4. K^n besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Diagonalisierbarkeit

- Genau die diagonalisierbaren Endomorphismen besitzen eine diagonale Darstellungsmatrix.
- Auch im allgemeinen Fall (siehe Lineare Algebra II) spielen Eigenpaare eine wesentliche Rolle.

- Dualräume
- Multilinearformen (Tensoren)
- Determinanten
- Innenprodukte

WS 2024/25 Grundlagen der Optimierung