Lineare Algebra I

Woche 13

30.01.2024 und 01.02.2024

Isomorphie und Dimension

Folgerung 18.1

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K.

Sind V und W isomorph, dann gilt $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis.

Isomorphie und Dimension

Folgerung 18.2

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K. Dann sind äquivalent:

1. V und W sind isomorphe Vektorräume.
2. $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis.

Isomorphiesatz für Faktorräume

Satz 18.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Dann gilt

$$(U_1 + U_2) \,/\, U_1 \cong U_2 \,/\, (U_1 \cap U_2)$$

Beweisidee.

Isomorphiesatz für Faktorräume

Folgerung 18.4

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und U_1, U_2 zwei Unterräume von V.

Im Fall von $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ folgt

$$(U_1 \oplus U_2) \,/\, U_1 \cong U_2.$$

Isomorphiesatz für Faktorräume

Beispiel

Dimension des Faktorraumes

Satz 18.5

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum von V. Dann gilt:

1. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(V \,/\, U)$
2. $\dim(V \,/\, U) = \operatorname{codim}(U)$
3. Ist V endlich-dimensional, dann gilt auch

$$\dim(V \,/\, U) = \dim(V) - \dim(U).$$

Dimensionen im Homomorphiesatz

Folgerung 18.6 und Definition 18.7

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$

Beweis.

Charakterisierung der Bijektivität linearer Abbildungen

Folgerung 18.8

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K.
Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Haben V und W dieselbe endliche Dimension $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:
   a. f ist injektiv.
   b. $\mathrm{Defekt}(f) = 0$.
   c. f ist surjektiv.
   d. $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V)$.
   e. f ist bijektiv.

Charakterisierung der Bijektivität linearer Abbildungen

Folgerung 18.8

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K.
Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

2. Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.

3. Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

4. Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \to W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Beispiel 18.9

1.

2.

Beispiel 18.9

3. Sind V und W beide unendlich-dimensional, so können alle Fälle auftreten. Beispiele für $V = W = K[t]$:
   - surjektiv, nicht injektiv
   - injektiv, nicht surjektiv
   - bijektiv
   - weder injektiv noch surjektiv

Koordinatendarstellung von Vektoren: Motivation

- Alle K-Vektorräume V derselben endlichen Dimension $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ sind zueinander isomorph.
- Wir suchen daher eine gemeinsame Standarddarstellung für jeden n-dimensionalen K-Vektorraum V.
- Dafür bietet sich der Standardvektorraum K^n an.

- Zwischen Standardvektorräumen hat jede lineare Abbildung die Form eines Matrix-Vektor-Produkts.
- Wir können uns also erhoffen, auch für lineare Abbildungen zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen eine Standarddarstellung durch Matrix-Vektor-Produkte zu finden.

Koordinatendarstellung von Vektoren

Satz 19.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

Dann ist die Abbildung

$$\Phi_B \colon K^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \, v_i \in V$$

ein linearer Isomorphismus $K^n \to V$.

Satz 19.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

Der zu Φ_B inverse Isomorphismus ist die **Koordinatenabbildung**

$$\Phi_B^{-1} \colon V \ni v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n,$$

die jedem Vektor $v \in V$ seinen eindeutigen **Koordinatenvektor** $x \in K^n$ bzgl. der Basis B zuordnet.

Beispiel 19.2

1. Das Polynom $7\,t^2 - 3\,t + 5$ hat in der Monombasis $(1,\ t,\ t^2)$ von $\mathbb{R}_2[t]$ den Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$, denn es gilt

$$7\,t^2 - 3\,t + 5 = \quad \cdot 1 + \qquad \cdot t + \quad \cdot t^2$$

Koordinatendarstellung von Vektoren

Beispiel 19.2

2. Um dasselbe Polynom $7\,t^2 - 3\,t + 5$ in der Basis $(t^2 - t + 1,\; t^2 + 3,\; t + 1)$ darzustellen, schreiben wir es als Linearkombination der Basisvektoren mit unbekanntem Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auf:

$$7\,t^2 - 3\,t + 5 = x_1\,(t^2 - t + 1) + x_2\,(t^2 + 3) + x_3\,(t + 1).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

Satz 19.3

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$.

Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f \colon V \to W$ eine eindeutig definierte Matrix $A \in K^{n \times m}$ mit der Eigenschaft

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, w_i \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, m.$$

Diese Matrix A heißt die **Darstellungsmatrix der Abbildung f bzgl. der Basen B_V und B_W**, in Symbolen:

$$A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f).$$

Beispiel 19.4

1. Sind $V = K^m$ und $W = K^n$ und die lineare Abbildung $f_A\colon K^m \to K^n$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit einer Matrix A gegeben, dann ist A selbst die Darstellungsmatrix

Beispiel 19.4

2. Sind $V = W = K^{[\![1,5]\!]}$ und die lineare Abbildung durch

$$g \colon V \ni (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \in W = V$$

gegeben, dann hat g bzgl. der Standardbasen $B_V = B_W = \big((1,0,0,0,0), \dots, (0,0,0,0,1)\big)$ die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(g) = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Beispiel 19.4

3. Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}_3[t]$ mit der Monombasis $(1,\ t,\ t^2\ t^3)$ betrachten wir die lineare Abbildung mit Werten in $W = \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}_3[t] \ni p \mapsto \begin{pmatrix} \widetilde{p}(-2) \\ \widetilde{p}(0) \\ \widetilde{p}(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Verwenden wir in $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis, so besitzt diese Abbildung die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Zuordnung Homomorphismus $\mapsto$ Darstellungsmatrix

Satz 19.5

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$.

Die Zuordnung

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V} \colon \operatorname{Hom}(V, W) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times m}$$

ist ein linearer Isomorphismus.

Dimension des Vektorraumes $\operatorname{Hom}(V, W)$

Folgerung 19.6

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ über demselben Körper K. Dann gilt

$$\dim(\operatorname{Hom}(V, W)) = n\, m.$$

Zusammenhang Homomorphismus und Darstellungsmatrix

Satz 19.7

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$. Weiter sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus und $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$. Dann gilt

$$f_A = \Phi_{B_W}^{-1} \quad \circ \quad f \quad \circ \quad \Phi_{B_V}\colon K^m \to K^n$$

$$f = \Phi_{B_W} \quad \circ \quad f_A \quad \circ \quad \Phi_{B_V}^{-1}\colon V \to W$$

Satz 19.8

Es seien U, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_U = (u_1, \ldots, u_k)$, $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$. Weiter seien $g\colon U \to V$ und $f\colon V \to W$ Homomorphismen. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_U}(f \circ g) = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)\, \mathcal{M}_{B_V}^{B_U}(g).$$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[ddd, "\Phi_{B_W}^{-1}"'] & & U \arrow[ll, "f \circ g"'] \arrow[dl, "g"] \\
& V \arrow[ul, "f"'] \arrow[d, shift left, "\Phi_{B_V}^{-1}"] & \\
& K^m \arrow[u, shift left, "\Phi_{B_V}"] \arrow[dl, "f_A"] & \\
K^n & & K^k \arrow[ll, "f_{A\,B}"] \arrow[ul, "f_B"'] \arrow[uuu, "\Phi_{B_U}"']
\end{tikzcd}$$

Eigenschaften linearer Abbildungen und ihrer Matrizen

Matrix $A \in K^{n \times m}$	lineare Abbildung $f\colon V \to W$
	$\operatorname{Bild}(f) = \{f(u) \in W \mid u \in V\}$
$\operatorname{SRang}(A) = \dim(\operatorname{SR}(A))$	$\operatorname{Rang}(f) = \dim(\operatorname{Bild}(f))$
	$\operatorname{Kern}(f) = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$
	$\operatorname{Defekt}(f) = \dim(\operatorname{Kern}(f))$

Eigenschaften linearer Abbildungen und ihrer Matrizen

Satz 19.9

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ über demselben Körper K. Weiter seien $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus sowie $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times m}$ die Darstellungsmatrix von f. Dann gilt:

1. $\operatorname{Bild}(f) = \Phi_{B_W}\big(\operatorname{Bild}(A)\big)$
2. $\operatorname{Rang}(f) = \operatorname{SRang}(A) = \operatorname{Rang}(A)$
3. $\operatorname{Kern}(f) = \Phi_{B_V}\big(\operatorname{Kern}(A)\big)$
4. $\operatorname{Defekt}(f) = \operatorname{Defekt}(A)$

Bestimmung von Bild und Kern

Beispiel 19.11

Bzgl. der Basen $B_V = (1,\ t,\ t^2\ t^3)$ und $B_W = (e_1, e_2, e_3)$ besitzt die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3$

$$f\colon p \mapsto \begin{pmatrix} \widetilde{p}(-2) \\ \widetilde{p}(0) \\ \widetilde{p}(2) \end{pmatrix} \text{ die Darstellungsmatrix } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bestimmung von Bild und Kern

Beispiel 19.11

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmung von Bild und Kern

Beispiel 19.11

Invertierbarkeit linearer Abbildungen und ihrer Matrizen

Satz 19.12

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W) = n$ über demselben Körper K. Weiter seien $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus sowie $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ die Darstellungsmatrix von f. Dann sind äquivalent:

1. f ist bijektiv.
2. $\operatorname{Rang}(f) = n$.
3. $\operatorname{Defekt}(f) = 0$.
4. A ist invertierbar.
5. $\operatorname{Rang}(A) = n$
6. $\operatorname{Defekt}(A) = 0$

Ist f bijektiv, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

Darstellungsmatrizen von Endomorphismen

End$(V, +, \cdot)$ ist Vektorraum

End$(V, +, \circ)$ ist Ring mit Eins

Satz 19.13

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n$ über dem Körper K. Weiter seien $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus sowie $A := \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n\times n}$ die Darstellungsmatrix von f.

Die Zuordnung

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}\colon \operatorname{End}(V, +, \circ) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in (K^{n\times n}, +, \cdot)$$

ist ein Isomorphismus von Ringen mit Eins.

Sie bildet weiter $\operatorname{Aut}(V)$ bijektiv auf $\operatorname{GL}(n, K)$ ab.