Lineare Algebra I

Woche 13

30.01.2024 und 01.02.2024

Folgerung 18.1

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K.

Sind V und W isomorph, dann gilt $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis. Es sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus.

Es sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V (Basisexistenzsatz).

Nach Satz 17.7 (ii) ist $(f(v_i))_{i \in I}$ eine Basis von W.

Diese Basen sind gleichmächtig, d.h. $\dim(V) = \dim(W)$.

Folgerung 18.2

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K. Dann sind äquivalent:

1. V und W sind isomorphe Vektorräume.
2. $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis. ① ⇒ ② siehe Folgerung 18.1

② ⇒ ① Wähle Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von V und $(w_1, \dots, w_n)$ von W, $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Satz 17.7 (ii) gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$. f ist bijektiv.

Satz 18.3

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Dann gilt

$$(U_1 + U_2) \,/\, U_1 \cong U_2 \,/\, (U_1 \cap U_2)$$

Beweisidee. $f(u_2) := u_2 + U_1$ ist ein surjektiver Homomorphismus $f: U_2 \to (U_1 + U_2)/U_1$ mit $\operatorname{Kern}(f) = U_1 \cap U_2$.

Nach Homomorphiesatz gilt:

$$U_2 / \operatorname{Kern}(f) = U_2 / (U_1 \cap U_2) \cong \operatorname{Bild}(f) = (U_1 + U_2)/U_1$$

Folgerung 18.4

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und U_1, U_2 zwei Unterräume von V.

Im Fall von $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ folgt

$$(U_1 \oplus U_2) \,/\, U_1 \cong U_2.$$

$$\begin{array}{ccc} (U_1 + U_2)/U_1 & \cong & U_2/(U_1 \cap U_2) \\ \| & & \| \\ (U_1 \oplus U_2)/U_1 & & U_2/\{0\} \cong U_2 \end{array}$$

Isomorphiesatz für Faktorräume

Beispiel in $V = K_3[t]$

$$U_1 = \langle t^1, t^2 \rangle \qquad U_1 + U_2 = \langle t^1, t^2, t^3 \rangle$$

$$U_2 = \langle t^2, t^3 \rangle \qquad U_1 \cap U_2 = \langle t^2 \rangle$$

$$(U_1 + U_2)/U_1 = \{ [p]_{U_1} = p + \langle t^1, t^2 \rangle \mid p \in \langle t^1, t^2, t^3 \rangle \}$$

$$\cong \langle t^3 \rangle$$

$$U_2/(U_1 \cap U_2) = \{ [q]_{U_1 \cap U_2} = q + \langle t^2 \rangle \mid q \in \langle t^2, t^3 \rangle \}$$

$$\cong \langle t^3 \rangle$$

Satz 18.5

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum von V. Dann gilt:

1. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(V / U)$

Im Fall $\dim(V) = \infty$ ist mind. einer der Räume auch unendlich-dimensional.

2. $\dim(V / U) = \operatorname{codim}(U)$

Dim. eines zu U kompl. Unterraumes

3. Ist V endlich-dimensional, dann gilt auch

$$\boxed{\underline{\dim(V / U) =} \dim(V) - \dim(U).}$$

Folgerung 18.6 und Definition 18.7

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\underbrace{\dim(V)}_{\text{verfügbare Dimension}} = \overbrace{\dim(\mathrm{Kern}(f))}^{\text{Defekt}(f)} + \overbrace{\dim(\mathrm{Bild}(f))}^{\text{Rang}(f)}.$$

Beweis. $U := \mathrm{Kern}(f)$, Satz 18.5:

$$\dim(V) = \dim(\underbrace{U}_{\mathrm{Kern}(f)}) + \dim(\underbrace{V/U}_{= V/\mathrm{Kern}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)})$$

Folgerung 18.8

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Haben V und W dieselbe endliche Dimension $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:
   a. f ist injektiv.
   b. $\operatorname{Defekt}(f) = 0$.

      klar
   c. f ist surjektiv.
   d. $\operatorname{Rang}(f) = \dim(V)$.

      klar
   e. f ist bijektiv.

Charakterisierung der Bijektivität linearer Abbildungen

Folgerung 18.8

Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K.
Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

2. Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.

   $V < W$

3. Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

   $V > W$

4. Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \to W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Charakterisierung der Bijektivität linearer Abbildungen

Beispiel 18.9 $\mathbb{R}$-Vektorräume

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ kann nicht surjektiv sein, z.B.

   $f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$ $\quad$ $\operatorname{Bild}(f) = \mathbb{R} \times \{0\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann nicht injektiv sein, z.B.

   $f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$ $\quad$ $\operatorname{Kern}(f) = \{0\} \times \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R}^2$

Beispiel 18.9

3. Sind V und W beide unendlich-dimensional, so können alle Fälle auftreten. Beispiele für $V = W = K[t]$:
   - surjektiv, nicht injektiv

     Ableitungsabbildung
   - injektiv, nicht surjektiv

     $f(p) = tp$
   - bijektiv

     $f(p) = -p$
   - weder injektiv noch surjektiv

     $f(p) = 0$

Koordinatendarstellung von Vektoren: Motivation

- Alle K-Vektorräume V derselben endlichen Dimension $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ sind zueinander isomorph.
- Wir suchen daher eine gemeinsame Standarddarstellung für jeden n-dimensionalen K-Vektorraum V.
- Dafür bietet sich der Standardvektorraum K^n an. $\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$
- Zwischen Standardvektorräumen hat jede lineare Abbildung die Form eines Matrix-Vektor-Produkts.
- Wir können uns also erhoffen, auch für lineare Abbildungen zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen eine Standarddarstellung durch Matrix-Vektor-Produkte zu finden.

Satz 19.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\underline{\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0}$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

Dann ist die Abbildung

Koordinaten ↦ Vektor

„Synthese"

„Dekodierung"

$$\Phi_B : K^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \, v_i}_{\text{LK der Basisvektoren}} \in V$$

ein linearer Isomorphismus $K^n \to V$.

Satz 19.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

Der zu Φ_B inverse Isomorphismus ist die **Koordinatenabbildung**

Vektor ↦ Koordinaten

„Analyse"

„Kodierung"

$$\Phi_B^{-1} \colon V \ni v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n,$$

die jedem Vektor $v \in V$ seinen eindeutigen **Koordinatenvektor** $x \in K^n$ bzgl. der Basis B zuordnet.

Beispiel 19.2

1. Das Polynom $7\,t^2 - 3\,t + 5$ hat in der Monombasis $(1,\ t,\ t^2)$ von $\mathbb{R}_2[t]$ den Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, denn es gilt

$$7\,t^2 - 3\,t + 5 = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot t + 7 \cdot t^2 \qquad \checkmark$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(7t^2 - 3t + 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung von Vektoren

Beispiel 19.2

2. Um dasselbe Polynom $7\,t^2 - 3\,t + 5$ in der Basis $(t^2 - t + 1,\ t^2 + 3,\ t + 1)$ darzustellen, schreiben wir es als Linearkombination der Basisvektoren mit unbekanntem Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auf:

$$7\,t^2 - 3\,t + 5 = x_1\,(t^2 - t + 1) + x_2\,(t^2 + 3) + x_3\,(t + 1).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} t^0 \to \\ t^1 \to \\ t^2 \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Satz 19.3

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$.

Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutig definierte Matrix $A \in K^{n \times m}$ mit der Eigenschaft

Koordinaten von $f(v_j)$

$$\underbrace{f(v_j)}_{\text{Bild eines Basisvektors}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, w_i}_{\text{LK der Basis im Zielraum}} \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{\cdot 1} & \cdots & a_{\cdot m} \end{bmatrix} \in K^{n \times m}$$

Diese Matrix A heißt die **Darstellungsmatrix der Abbildung f bzgl. der Basen B_V und B_W**, in Symbolen:

„von"

$$A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f).$$

„nach"

Beispiel 19.4

1. Sind $V = K^m$ und $W = K^n$ und die lineare Abbildung $f_A \colon K^m \to K^n$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit einer Matrix A gegeben, dann ist A selbst die Darstellungsmatrix bei Verwendung der Standardbasen

$$A = \mathcal{M}^{\overset{K^m}{(e_1, \ldots, e_m)}}_{\underset{K^n}{(e_1, \ldots, e_n)}}(f_A) = \begin{bmatrix} f_A(e_1) & \cdots & f_A(e_m) \end{bmatrix}$$

Beispiel 19.4 $\cong K_5$

2. Sind $V = W = K^{[\![1,5]\!]}$ und die lineare Abbildung durch

$$g\colon V \ni (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \in W = V$$

gegeben, dann hat g bzgl. der Standardbasen $B_V = B_W = \big((1,0,0,0,0), \ldots, (0,0,0,0,1)\big)$ die Darstellungsmatrix

$g((1,0,0,0,0))$
$= (0,1,0,0,0)$

$$\mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{5 \times 5}$$

Beispiel 19.4

3. Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}_3[t]$ mit der Monombasis $(1,\ t,\ t^2\ t^3)$ betrachten wir die lineare Abbildung mit Werten in $W = \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}_3[t] \ni p \mapsto \begin{pmatrix} \widetilde{p}(-2) \\ \widetilde{p}(0) \\ \widetilde{p}(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Verwenden wir in $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis, so besitzt diese Abbildung die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(g) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Zuordnung Homomorphismus $\mapsto$ Darstellungsmatrix

Satz 19.5

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$.

Die Zuordnung $\quad f \mapsto A$

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V} : \underline{\mathrm{Hom}(V, W)} \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in \underline{K^{n \times m}}$$

ist ein linearer Isomorphismus.

f hat die Darst. matrix $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

g hat — " — $B = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(g)$

$\Rightarrow$ $f + g$ — " — $A + B$

αf — " — αA

Folgerung 19.6

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ über demselben Körper K. Dann gilt

$$\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = n\, m.$$

folgt aus der Isomorphie $\mathrm{Hom}(V, W) \cong K^{n \times m}$.

Zusammenhang Homomorphismus und Darstellungsmatrix

Satz 19.7

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \dots, w_n)$. Weiter sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus und $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$. Dann gilt

Koord. $\leftarrow\!\shortmid$ Vektor in W $\leftarrow\!\shortmid$ Vektor in V $\leftarrow\!\shortmid$ Koord.

$$f_A = \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V}\colon K^m \to K^n$$

Vektor in W $\leftarrow\!\shortmid$ Koord. $\leftarrow\!\shortmid$ Koord. $\leftarrow\!\shortmid$ Vektor in V

$$f = \Phi_{B_W} \circ f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1}\colon V \to W$$

$$\begin{tikzcd}
W & V \arrow[l, "f"'] \arrow[d, shift left, "\Phi_{B_V}^{-1}"] \\
K^n \arrow[u, "\Phi_{B_W}"] & K^m \arrow[l, "f_A"] \arrow[u, shift left, "\Phi_{B_V}"]
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm kommutiert.

Darstellungsmatrix der Komposition von Homomorphismen

Satz 19.8

Es seien U, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_U = (u_1, \ldots, u_k)$, $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$. Weiter seien $g \colon U \to V$ und $f \colon V \to W$ Homomorphismen. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_U}(f \circ g) = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)\,\mathcal{M}_{B_V}^{B_U}(g).$$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[ddd, "\Phi_{B_W}^{-1}"'] & & U \arrow[ll, "f \circ g"'] \arrow[dl, "g"] \\
& V \arrow[ul, "f"] \arrow[d, shift left, "\Phi_{B_V}^{-1}"] & \\
& K^m \arrow[u, shift left, "\Phi_{B_V}"] \arrow[dl, "f_A"] & \\
K^n & & K^k \arrow[ll, "f_{A\,B}"] \arrow[ul, "f_B"'] \arrow[uuu, "\Phi_{B_U}"']
\end{tikzcd}$$

$f_A = \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V}$

$f_B = \Phi_{B_V}^{-1} \circ g \circ \Phi_{B_U}$

$f_{AB} = f_A \circ f_B$

$\quad = \Phi_{B_W}^{-1} \circ (f \circ g) \circ \Phi_{B_U}$

$\Leftrightarrow AB = \mathcal{M}_{B_W}^{B_U}(f \circ g)$

Eigenschaften linearer Abbildungen und ihrer Matrizen

Matrix $A \in K^{n \times m}$	lineare Abbildung $f\colon V \to W$
$\mathrm{Bild}(A) := \mathrm{SR}(A) = \mathrm{Bild}(f_A)$	$\mathrm{Bild}(f) = \{f(u) \in W \mid u \in V\}$
$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{SRang}(A) = \dim(\mathrm{SR}(A))$	$\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$
$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(f_A)$	$\mathrm{Kern}(f) = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$
$\mathrm{Defekt}(A) := \dim(\mathrm{Kern}(A))$	$\mathrm{Defekt}(f) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$

$$\mathrm{Kern}(A) := \{x \in K^m : Ax = 0\}$$

Eigenschaften linearer Abbildungen und ihrer Matrizen

Satz 19.9

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ über demselben Körper K. Weiter seien $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus sowie $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times m}$ die Darstellungsmatrix von f. Dann gilt:

1. $\operatorname{Bild}(f) = \Phi_{B_W}\big(\operatorname{Bild}(A)\big)$
2. $\operatorname{Rang}(f) = \operatorname{SRang}(A) = \operatorname{Rang}(A)$
3. $\operatorname{Kern}(f) = \Phi_{B_V}\big(\operatorname{Kern}(A)\big)$
4. $\operatorname{Defekt}(f) = \operatorname{Defekt}(A)$

Führe also die Best. an irgendeiner Darst.matrix von f durch!

Bestimmung von Bild und Kern

Beispiel 19.11

Bzgl. der Basen $B_V = (1,\ t,\ t^2\ t^3)$ und $B_W = (e_1, e_2, e_3)$ besitzt die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3$

$$f\colon p \mapsto \begin{pmatrix} \widetilde{p}(-2) \\ \widetilde{p}(0) \\ \widetilde{p}(2) \end{pmatrix} \text{ die Darstellungsmatrix } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0 \in \mathbb{R}^3\}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \overset{\text{ZSF}}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]} \rightsquigarrow \overset{\text{red. ZSF}}{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

$\mathrm{Rang}(A) = 3$

$\mathrm{Defekt}(A) = 4 - 3 = 1$

$\mathrm{Kern}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Beispiel 19.11

Bild (A)

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

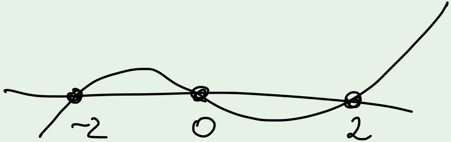
$$\operatorname{Bild}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$

Jede andere Basis auch möglich!

Beispiel 19.11

$$\operatorname{Kern}(f) = \Phi_{B_V}(\operatorname{Kern}(A)) = \Phi_{B_V}\left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right)$$

$$= \left\langle \Phi_{B_V}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle -4t + t^3 \rangle$$



Invertierbarkeit linearer Abbildungen und ihrer Matrizen

Satz 19.12

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W) = n$ über demselben Körper K. Weiter seien $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f \colon V \to W$ ein Homomorphismus sowie $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ die Darstellungsmatrix von f. Dann sind äquivalent:

1. f ist bijektiv.
2. $\operatorname{Rang}(f) = n$.
3. $\operatorname{Defekt}(f) = 0$.
4. A ist invertierbar.
5. $\operatorname{Rang}(A) = n$
6. $\operatorname{Defekt}(A) = 0$

Ist f bijektiv, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

nur eine Basis!

End$(V, +, \cdot)$ ist Vektorraum

$f \mapsto A$

$g \mapsto B$

$f + g \mapsto A + B$

$\alpha f \mapsto \alpha A$

End$(V, +, \circ)$ ist Ring mit Eins

Dazu $\mathcal{M}^{B_V}_{B_V}(f) \cdot \mathcal{M}^{B_V}_{B_V}(g)$

$f \circ g \mapsto A \cdot B$

Darstellungsmatrizen von Endomorphismen

Satz 19.13

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) = n$ über dem Körper K. Weiter seien $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus sowie $A := \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n\times n}$ die Darstellungsmatrix von f.

Die Zuordnung

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}\colon \operatorname{End}(V,+,\circ) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in (K^{n\times n},+,\cdot)$$

ist ein Isomorphismus von Ringen mit Eins.

Sie bildet weiter $\operatorname{Aut}(V)$ bijektiv auf $\operatorname{GL}(n,K)$ ab.