Lineare Algebra I

Woche 12

23.01.2024 und 25.01.2024

Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Definition 17.1

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

1. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **strukturverträglich** oder ein **linearer Homomorphismus** oder eine **lineare Abbildung** von $(V, +_1, \cdot_1)$ in $(W, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
f(u +_1 v) &= f(u) +_2 f(v) && \text{für alle } u, v \in V \\
f(\alpha \cdot_1 u) &= \alpha \cdot_2 f(u) && \text{für alle } u \in V \text{ und alle } \alpha \in K.
\end{aligned}
$$

2. Im Fall $(V, +_1, \cdot_1) = (W, +_2, \cdot_2)$ sprechen wir von einem **linearen Endomorphismus**.

Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Definition 17.1

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

3. Ist $f\colon V \to W$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **linearer Isomorphismus**. In diesem Fall nennen wir $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ auch zueinander **isomorphe Vektorräume**:

$$(V, +_1, \cdot_1) \cong (W, +_2, \cdot_2).$$

4. Im Fall $(V, +_1, \cdot_1) = (W, +_2, \cdot_2)$ und bijektivem $f\colon V \to W$ sprechen wir auch von einem **linearen Automorphismus**.

Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Definition 17.1

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

5. Das **Bild** und der **Kern** eines Homomorphismus $f \colon V \to W$ sind definiert als

$$\operatorname{Bild}(f) := \left\{ f(u) \in W \,\middle|\, u \in V \right\} = f(V)$$
$$\operatorname{Kern}(f) := \left\{ u \in V \,\middle|\, f(u) = 0_W \right\} = f^{-1}(\{0_W\})$$

Beispiel 17.3

1. Die Transposition

$$\cdot^\mathsf{T} \colon K_n \ni x \mapsto x^\mathsf{T} \in K^n$$

2. Die **Vektorisierung**

$$\operatorname{vec} \colon K^{n \times m} \ni A \mapsto \operatorname{vec}(A) \in K^{n\,m}$$

definiert durch

$$\operatorname{vec}\left(\begin{bmatrix} | & & | \\ a_{\bullet 1} & \cdots & a_{\bullet m} \\ | & & | \end{bmatrix} \right)$$

Beispiel 17.3

3. Die **Projektion auf die *i*-te Koordinate**

$$\pi_i \colon K^n \ni x \mapsto x_i \in K$$

4. Die **Ableitungsabbildung**

$$\cdot' \colon \big\{ f \in \mathbb{R}^{(a,b)} \,\big|\, f \text{ ist differenzierbar} \big\} \ni f \mapsto f' \in \mathbb{R}^{(a,b)}$$

Beispiel 17.3

5. Es sei $A \in K^{n \times m}$ eine Matrix über einem Körper K. Dann ist die Matrix-Vektor-Multiplikation mit A

$$f_A \colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) := A\,x \in K^n$$

Komposition linearer Abbildungen

Lemma 17.4

Es seien $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über demselben Körper K.

Sind $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ lineare Abbildungen, dann ist auch $f \circ g\colon U \to W$ eine lineare Abbildung.

Beweis. Hausaufgabe

Eigenschaften linearer Abbildungen

Lemma 17.5

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. $f(0) = 0$.
2. $f(-v) = -f(v)$.
3. $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, f(v_i)$.
4. Ist $E \subseteq V$, dann gilt $f\big(\langle E \rangle\big) = \big\langle f(E) \big\rangle$.
5. Ist $F = (v_i)_{i \in I}$, dann gilt $f\big(\langle F \rangle\big) = \big\langle f(F) \big\rangle$.

Eigenschaften linearer Abbildungen

Lemma 17.5

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

6. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum.

7. Ist $Z \subseteq W$ ein Unterraum, dann ist $f^{-1}(Z) \subseteq V$ ein Unterraum.

8. Ist $M \subseteq V$ eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann ist auch $f(M) \subseteq W$ eine linear abhängige Menge von Vektoren.

9. Ist $F = (v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren in V, dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren.

Kern und Bild linearer Abbildungen

Lemma 17.6

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. $\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.
2. f ist surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{Bild}(f) = W$ gilt.
3. $\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V.
4. f ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.

Konstruktion linearer Abbildungen

Satz 17.7

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

2. Ist $B := (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie in W mit gleicher Indexmenge, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

   Diese Abbildung hat außerdem folgende Eigenschaften:

   a. $\operatorname{Bild}(f) = \langle (w_i)_{i \in I} \rangle$.
   b. f ist surjektiv genau dann, wenn $\langle (w_i)_{i \in I} \rangle = W$ gilt.
   c. f ist injektiv genau dann, wenn $(w_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist.
   d. f ist bijektiv genau dann, wenn $(w_i)_{i \in I}$ eine Basis von W ist.

Konstruktion linearer Abbildungen

Satz 17.7

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

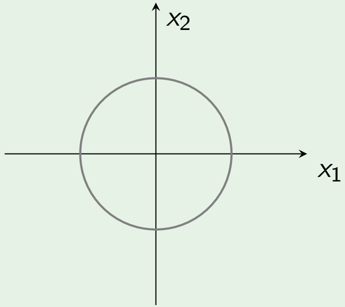
1. Ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, dann gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Beispiel 17.8

1. Es sei K ein Körper und $(e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis in K^m. Eine lineare Abbildung $f\colon K^m \to K^n$ ist dadurch festgelegt,

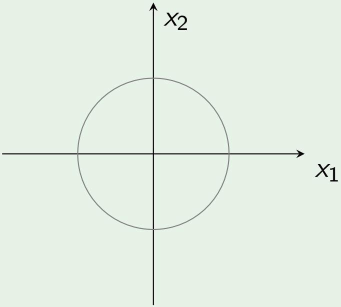
Beispiel 17.8

2. Drehung um den Winkel α:



Beispiel 17.8

3. Spiegelung an einer Achse durch den Ursprung:



Beispiel 17.8

4. Es sei $K[t]$ der Polynomraum über einem Körper K. Die **Ableitungsabbildung** $f\colon K[t] \to K[t]$ ist ein linearer Endomorphismus, der durch die Festlegung

$$f(t^n) := \begin{cases} n\, t^{n-1} & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

eindeutig bestimmt ist.

Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung

Lemma 17.9

1. Die **von $A \in K^{n \times m}$ induzierte lineare Abbildung**

$$f_A \colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) := A\,x \in K^n$$

   ist eine lineare Abbildung $K^m \to K^n$.

2. Ist $f \colon K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n \times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.

3. Sind $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{A\,B}.$$

4. $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A \colon K^n \to K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Menge linearer Homomorphismen

Definition 17.10

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

1. $\operatorname{Hom}(V, W) := \{f \colon V \to W \mid f \text{ ist linearer Homomorphismus}\}$
2. $\operatorname{End}(V) := \{f \colon V \to V \mid f \text{ ist linearer Endomorphismus}\}$
3. $\operatorname{Iso}(V, W) := \{f \colon V \to W \mid f \text{ ist linearer Isomorphismus}\}$
4. $\operatorname{Aut}(V) := \{f \colon V \to V \mid f \text{ ist linearer Automorphismus}\}$

Der Vektorraum $\operatorname{Hom}(V, W)$ und der Ring $\operatorname{End}(V)$

Satz 17.11

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Dann bildet $(\operatorname{Hom}(V, W), +, \cdot)$ mit der punktweisen Addition $+$ und der punktweisen S-Multiplikation $\cdot$ einen Vektorraum.

Satz 17.12

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper K. Dann bildet $(\operatorname{End}(V), +, \circ)$ mit der punktweisen Addition $+$ und der Komposition $\circ$ einen Ring mit dem Einselement id_V.

Faktorräume: Motivation

Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler der Gruppe $(G, +)$, so konnten wir auf der Faktormenge $G \,/\, N = \big\{[a] = a + N \,\big|\, a \in G\big\}$ eine Gruppenstruktur etablieren:

$$[a] \mathbin{\tilde{+}} [b] \coloneqq [a + b]$$

Ist $U \subseteq V$ des Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, so können wir auf der Faktormenge $V \,/\, U = \big\{[v] = v + U \,\big|\, v \in V\big\}$ eine struktur etablieren:

$$[v_1] \mathbin{\tilde{+}} [v_2] \coloneqq [v_1 + v_2]$$

Satz 17.13

Es sei U ein Unterraum des Vektorraumes $(V, +, \cdot)$. Dann gilt:

1. Die Faktormenge $V / U = \big\{[v] = v + U \,\big|\, v \in V\big\}$ mit

$$[v_1] \mathbin{\tilde{+}} [v_2] := [v_1 + v_2]$$
$$\alpha \mathbin{\tilde{\cdot}} [v] := [\alpha \cdot v]$$

   bildet einen Vektorraum $(V / U, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$.

2. Die **kanonische Surjektion**

$$\pi \colon \begin{cases} V \to V / U \\ v \mapsto [v] \end{cases}$$

   ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\operatorname{Kern}(\pi) = U$.

Beispiel 17.15

1. Ausfaktorisieren des trivialen Unterraumes $\{0\}$ aus V:

2. Ausfaktorisieren des trivialen Unterraumes V aus V:

3. Für $V = K[t]$ über einem Körper K und $U = K_0[t]$ besteht der Faktorraum $V \,/\, U$ gerade aus den Äquivalenzklassen von Polynomen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$p \overset{U}{\sim} q$$

Homomorphiesatz für Vektorräume

Satz 17.17

Weiter sei $f\colon V \to W$ ein linearer Homomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} I\colon V \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [v] &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

ein linearer Isomorphismus.

Homomorphiesatz für Vektorräume

Satz 17.17

$$\begin{aligned} I \colon V \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [v] &\longmapsto f(v) \end{aligned} \qquad \text{ist linearer Isomorphismus}$$

Beweis.

Beispiel 17.18

1.

Beispiel 17.18

2.