Plenarübung LA I

(Inhalts)-Woche 12

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	2	18.18%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	9.09%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	8	72.73%
Gesamt(Brutto)	**11**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	0	0.00%
Keine Antwort	3	27.27%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	8	72.73%
Gesamt(Brutto)	**11**	**100.00%**

Kaum Rückmeldungen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Wiederholen und Veranschaulichen der Kernthemen

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Wiederholung Linearität

(3) Anwendungsbeispiel und -resultate zu Konstruktion linearer Abbildungen

(4) True/False Quiz lineare Abbildungen

(5) Wiederholung Normalteiler/Faktorgruppe & Unterraum/Faktorraum

(6) Beispiele zu Faktorräumen

(7) True/False Quiz Faktorräume

Wochenüberblick

Wiederholung Vektorraumhomomorphismen

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(v +_1 \bar{v}) &= f(v) +_2 f(\bar{v}) && \text{für alle } v, \bar{v} \in V \\ f(\alpha \cdot_1 v) &= \alpha \cdot_2 f(v) && \text{für alle } v \in V \text{ und alle } \alpha \in K. \end{aligned}$$

Linearitätstest in einem Schritt

Lemma

Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ K-Vektorräume und $f\colon V \to W$. Dann ist f genau dann linear, wenn

$$f(v + \alpha\bar{v}) = f(v) + \alpha f(\bar{v}) \quad \forall v, \bar{v} \in V, \alpha \in K.$$

Beweis.

Anwendungsbeispiel

$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(v_1, v_2, v_3) \mapsto (3v_1 + v_2, v_1, 2v_3)$ über $\mathbb{R}$.

Grundlegende Eigenschaften linearer Abbildungen

Lemma 17.5

Es seien $(V,+,\cdot)$ und $(W,+,\cdot)$ zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Dann gilt

(1) $f(0) = 0$.

(2) $f(-v) = -f(v)$.

(3) $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, f(v_i)$.

(4) Ist $E \subseteq V$, dann gilt $f\big(\langle E\rangle\big) = \big\langle f(E)\big\rangle$.

(5) Ist $F = (v_i)_{i\in I}$, dann gilt $f\big(\langle F\rangle\big) = \big\langle f(F)\big\rangle$.

(6) Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum.

(7) Ist $Z \subseteq W$ ein Unterraum, dann ist $f^{-1}(Z) \subseteq V$ ein Unterraum.

(8) Ist $M \subseteq V$ eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann ist auch $f(M) \subseteq W$ eine linear abhängige Menge von Vektoren.

(9) Ist $F = (v_i)_{i\in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren in V, dann ist auch $(f(v_i))_{i\in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren.

Linearität – Red Flag(s)

Jede lineare Abbildung erfüllt $f(0) = 0$. D. h. additive Translationen können nicht linear sein! Für komplexere Funktionsdarstellungen lohnt sich der Test.

(1) $f \colon \mathbb{R}_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1) \in \mathbb{R}_5$ über $\mathbb{R}$.

(2) $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto \mathbb{Q} \setminus M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

Andere „nichtlineare“ Abbildungen können linear sein.

(3) $f \colon \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \mapsto f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

Konstruktion linearer Abbildungen

Satz 17.7

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K-Vektorräume.

(1) Ist $B := (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie in W mit gleicher Indexmenge, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

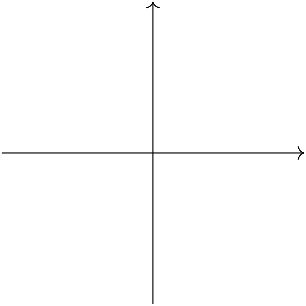
(2) Ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, dann gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Oder auch:

Konstruktion linearer Abbildungen

Was wissen wir über lineares $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



True/False Quiz – lineare Abbildungen

Es seien V und W K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear und $U \subseteq V$.

(1) Ist $f(U)$ ein Unterraum von W, dann ist U ein Unterraum von V.

(2) Bilder linear unabhängiger Mengen können linear abhängig sein.

(3) Bilder linear abhängiger Mengen können linear unabhängig sein.

(4) Es gibt eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, g(e_1) = 1, g(e_2) = 1$

(5) Es gibt eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, g(1) = e_1, g(2) = e_1$

Wiederholung Normalteiler und Faktorgruppe

Definition

(1) Eine Untergruppe $(N, \star)$ heißt eine **normale Untergruppe** oder **Normalteiler** von $(G, \star)$, wenn gilt:

$$\underbrace{a \star N}_{[a]_{\sim N}} = \underbrace{N \star a}_{[a]_{N\sim}} \quad \text{für alle } a \in G.$$

(2) $G \,/\, N := \big\{[a] = a \star N \,\big|\, a \in G\big\}$ heißt **Faktormenge**.

(3) $(G \,/\, N, \widetilde{\star})$ mit $[a] \,\widetilde{\star}\, [b] := [a \star b]$ ist die **Faktorgruppe**.

(4) $\pi \colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$ heißt **kanonische Surjektion**.

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Wie sehen die Normalteiler in $(V, +)$ aus?

Unterräume & Faktorräume

Aus $(V, +)$ können wir die Faktorgruppen $(V \,/\, G)$

bauen.

Um einen Faktorvektorraum zu erhalten benötigen wir eine verträgliche skalare Multiplikation der Form $\alpha[v] = [\alpha v]$.

Das einfachste Beispiel:

Beispiele in Faktorräumen

Im Potenzmengenraum $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $\mathbb{Z}_2$

Wie sehe die Elemente des Faktorraums $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \,/\, \langle \mathbb{N} \rangle$ aus?

Im Funktionenraum $(\mathbb{R}^{[\![1,6]\!]}, +, \cdot)$ über $\mathbb{R}$

Welche Teilmenge(n) von $\{[e_x] \,|\, x \in [\![1,5]\!]\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^{[\![1,5]\!]} \,/\, \{f \mid f(\{1,3\}) = \{0\}\}$ über $\mathbb{R}$?

Lineare Abbildungen zwischen Faktorräumen

Ist die folgende Abbildung linear?

$\mathbb{R}_5 \ni (v_1, \ldots, v_5) \mapsto [(3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1)] \in \mathbb{R}_5 \,/\, \langle e_2, e_5 \rangle$ über $\mathbb{R}$.

Kriegen wir das auch hier hin?

Gibt es einen Unterraum $U \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, so dass
$f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto [\mathbb{Q} \setminus M] \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \,/\, U$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ linear ist?

True/False Quiz – Faktorräume

Es sei V ein K-Vektorraum und U, W Unterräume von V.

(1) Jedes Element aus $V\,/\,U$ ist zu U gleichmächtig.

(2) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, dann erzeugt $([v_i])_{i \in I}$ ganz $V\,/\,U$

(3) Die Dimension von $V\,/\,U$ ist mindestens so groß, wie die von U.

(4) Die Dimension von $V\,/\,U$ ist höchstens so groß, wie die von V.

(5) Ist $U \subseteq W$, dann ist $V\,/\,W \subseteq V\,/\,U$

Lineare Abbildungen als Vektorraum

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Welche Dimension hat der Unterraum

$$\mathrm{Hom}(V, W)_U := \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \mathrm{Kern}(f) \supseteq U\}?$$