Plenarübung LA I

(Inhalts)-Woche 12

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	2	18.18%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	9.09%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	8	72.73%
Gesamt(Brutto)	**11**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	0	0.00%
Keine Antwort	3	27.27%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	8	72.73%
Gesamt(Brutto)	**11**	**100.00%**

Kaum Rückmeldungen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Wiederholen und Veranschaulichen der Kernthemen

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Wiederholung Linearität

(3) Anwendungsbeispiel und -resultate zu Konstruktion linearer Abbildungen

(4) True/False Quiz lineare Abbildungen

(5) Wiederholung Normalteiler/Faktorgruppe & Unterraum/Faktorraum

(6) Beispiele zu Faktorräumen

(7) True/False Quiz Faktorräume

Wochenüberblick

Bisherige Strukturen	(Halb-)Gruppen, Ringe, Körper (und deren Homomorphismen) Vektorräume (abelsche Gruppe, Skalare Multipl.)
Einschub	Matrizen (Werkzeuge für verschiedene Anwendungen)
Jetzt	Vektorraumhomomorphismen Insbesondere deren Darstellung

$$\begin{array}{ccc} \text{Homom.} & \xrightarrow{V=W} & \text{Endom.} \\ \text{bij.}\downarrow & & \downarrow \\ \text{Isom.} & \longrightarrow & \text{Autom.} \end{array}$$

Bild, Kern $\Rightarrow$ Unterräume

Können auf Basen definiert werden

Auf K^n, K^m entsprechen lineare Abb. der Matrix-Vektor-Mult.

$$f = f_A \text{ für genau ein } A \in K^{n\times m}$$

Bilden einen Vektorraum $(\mathrm{Hom}(V,W), +, \cdot)$

Faktorräume (Rolle der Normalteiler wird von UR übernommen)

Homomorphiesatz

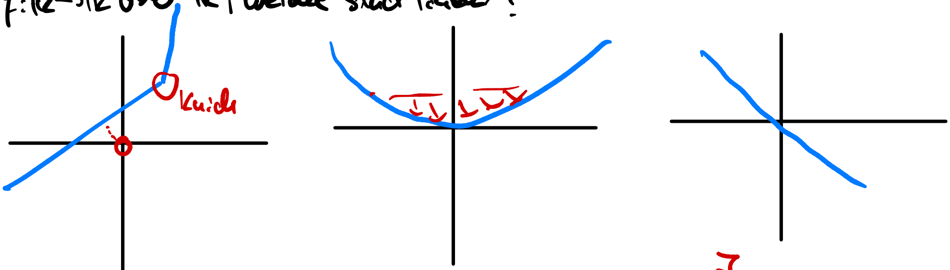
Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn gilt:

Additivität (beschreibt das Verhalten auf $U_1 \oplus U_2$

Linearität
$$\begin{cases} f(v +_1 \bar{v}) = f(v) +_2 f(\bar{v}) & \text{für alle } v, \bar{v} \in V \\ f(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 f(v) & \text{für alle } v \in V \text{ und alle } \alpha \in K. \end{cases}$$

Homogenität (beschreibt das Verhalten $\langle v \rangle, v \in V$)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, welche sind linear?



Nein Nein Ja

Linearitätstest in einem Schritt

Lemma

Es seien $(V,+,\cdot)$, $(W,+,\cdot)$ K-Vektorräume und $f\colon V \to W$. Dann ist f genau dann linear, wenn

$$f(v+\alpha\bar{v}) = f(v) + \alpha f(\bar{v}) \quad \forall v,\bar{v} \in V, \alpha \in K.$$

Beweis. $\alpha = 1 \Rightarrow$ Additivität: $f(v+\bar{v}) = f(v+1\cdot\bar{v}) = f(v)+1\cdot f(\bar{v}) = f(v)+f(\bar{v})$

Homogenität: $f(\alpha v) = f(0+\alpha v) = f(0)+\alpha f(v) = f(v-v)+\alpha f(v)$

$= f(v)-f(v)+\alpha f(v)$

$= 0$

$\square$

Anwendungsbeispiel

$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(v_1,v_2,v_3) \mapsto (3v_1+v_2, v_1, 2v_3)$ über $\mathbb{R}$ ist linear. Seien also $v,\bar{v} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(v+\alpha\bar{v}) = f(v_1+\alpha\bar{v}_1, v_2+\alpha\bar{v}_2, v_3+\alpha\bar{v}_3) = (3(v_1+\alpha\bar{v}_1)+(v_2+\bar{v}_2), v_1+\alpha\bar{v}_1, 2(v_3+\alpha\bar{v}_3))$

$= (3v_1+v_2, v_1, 2v_3)+\alpha(3\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_1, 2\bar{v}_3) = f(v)+\alpha f(\bar{v})$.

Lemma 17.5

Wie sehen diese Resultate für Gruppen aus?

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Dann gilt

(1) $f(0) = 0$. $f(e)=e$

(2) $f(-v) = -f(v)$. $f(a') = f(a)'$

(3) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$. $f(a_1 * \dots * a_n) = f(a_1) \square \dots \square f(a_n)$

(4) Ist $E \subseteq V$, dann gilt $f(\langle E \rangle) = \langle f(E) \rangle$. ← Genau so

(5) Ist $F = (v_i)_{i \in I}$, dann gilt $f(\langle F \rangle) = \langle f(F) \rangle$.

(6) Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum. Gruppen

(7) Ist $Z \subseteq W$ ein Unterraum, dann ist $f^{-1}(Z) \subseteq V$ ein Unterraum.

nicht sinnvoll übertragbar

(8) Ist $M \subseteq V$ eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann ist auch $f(M) \subseteq W$ eine linear abhängige Menge von Vektoren.

(9) Ist $F = (v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren in V, dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren.

Linearität – Red Flag(s)

Jede lineare Abbildung erfüllt $f(0) = 0$. D. h. additive Translationen können nicht linear sein! Für komplexere Funktionsdarstellungen lohnt sich der Test.

Additive Translation

$f(0) = (0,0,0,0,1) \neq 0$

(1) $f : \mathbb{R}_5 \ni (v_1, \ldots, v_5) \mapsto (3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1) \in \mathbb{R}_5$ über $\mathbb{R}$.

(2) $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto \mathbb{Q} \setminus M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

Nicht so klar erkennbar, Test $f(0)=0$? $f(\emptyset)=\emptyset$? $\emptyset \mapsto \mathbb{Q}\setminus\emptyset = \mathbb{Q} \neq \emptyset \Rightarrow$ Nicht linear

Andere „nichtlineare“ Abbildungen können linear sein.

„nichtlinear“ überträgt sich nicht unbedingt zwischen Körpern

(3) $f : \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \mapsto f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

$= f \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ da $x \mapsto x^2 = x$ in $\mathbb{Z}_2$

In $\mathbb{Z}_2$ ist jedes Element multiplikativ selbstneutral

Konstruktion linearer Abbildungen

Satz 17.7

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K-Vektorräume.

(1) Ist $B := (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie in W mit gleicher Indexmenge, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

(2) Ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, dann gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Oder auch: Kennt man die Werte einer linearen Abbildung auf einer Familie einer Familie (oder Menge) $(v_i)_{i\in I}$, dann kennt man alle Werte auf $\langle v_i \rangle_{i \in I}$.

$$f\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k}_{\in \langle v_i \rangle_{i\in I}}\Big) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(v_k)}_{\in \langle f(v_i) \rangle}$$

Siehe Lemma 17.5

Eindeutigkeit $\Leftrightarrow$ $\langle v_i \rangle = V$?

Surjektivität $\Leftrightarrow$ $\langle w_i \rangle = W$?

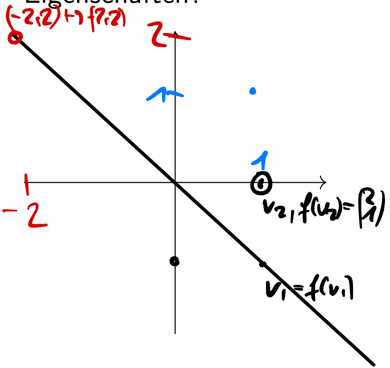
Injektivität $\Leftrightarrow$ w_i l.u.?

Wohldefiniertheit $\Leftrightarrow$ v_i l.u.?

Konstruktion linearer Abbildungen

Was wissen wir über lineares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ Legt die Werte auf $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ fest

$f_{|\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \mathrm{id}$.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eindeutig festgelegt, da (v_1, v_2) Basis von $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$

Wie findet man $f\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$? Scharf hingucken.

und $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? LGS lösen

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = f\left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -2 f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Analog:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f\left(-1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \ldots = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

True/False Quiz – lineare Abbildungen

Es seien V und W K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear und $U \subseteq V$.

(1) Ist $f(U)$ ein Unterraum von W, dann ist U ein Unterraum von V.

Falsch. (Falsche Richtung) Die Nullfunktion bildet jede Teilmenge V auf einen UR ab.

(2) Bilder linear unabhängiger Mengen können linear abhängig sein.

Wahr, wieder Nullfkt.

(3) Bilder linear abhängiger Mengen können linear unabhängig sein.

Falsch, Lemma 17.8

(4) Es gibt eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, g(e_1) = 1, g(e_2) = 1$ über $\mathbb{R}$

Wahr, diese ist eindeutig, nicht injektiv, surjektiv weil $\langle 1 \rangle = \mathbb{R}$

(5) Es gibt eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, g(1) = e_1, g(2) = e_1$ über $\mathbb{R}$

Falsch $(1,2)$ ist ein abh. aber Funktionswerte sind nicht passend skaliert

Wiederholung Normalteiler und Faktorgruppe

Definition

(1) Eine Untergruppe $(N, \star)$ heißt eine **normale Untergruppe** oder **Normalteiler** von $(G, \star)$, wenn gilt:

$$\underbrace{a \star N}_{[a]_{\sim N}} = \underbrace{N \star a}_{[a]_{N\sim}} \quad \text{für alle } a \in G.$$

"Mengenkommutativität" für Repräsentantenunabhängigkeit

(2) $G \,/\, N := \{[a] = a \star N \mid a \in G\}$ heißt **Faktormenge**.

(3) $(G \,/\, N, \widetilde{\star})$ mit $[a] \,\widetilde{\star}\, [b] := [a \star b]$ ist die **Faktorgruppe**.

(4) $\pi \colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$ heißt **kanonische Surjektion**.

wollen übertr. auf Vektorräume

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Wie sehen die Normalteiler in $(V, +)$ aus? Jede Untergruppe ist NT da $(V,+)$ abelsch ist.

✓ Additiv haben wir alles, was wir brauchen.

Unterräume & Faktorräume

Aus $(V, +)$ können wir die Faktorgruppen $(V \,/\, G)$ für jede Untergruppe $G \subseteq V$ bauen.

Um einen Faktorvektorraum zu erhalten benötigen wir eine verträgliche skalare Multiplikation der Form $\alpha[v] = [\alpha v]$. (Repräsentantenwahl.)

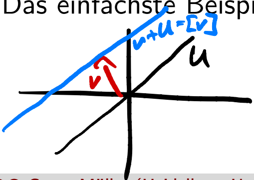
$\alpha(v+G) \qquad \alpha v + G$

Für jede Untergruppe ist das i.A. nicht repr.-wahl. Bspw. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ über $\mathbb{R}$

$G = \mathbb{Z}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. $\frac{3}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_G = \left[\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq G = \left[\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right] = \frac{3}{2}\left[\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right]$

$\Rightarrow$ Unterräume ersetzen Normalteiler

Das einfachste Beispiel:



Elemente des Faktorraums sind affine Unterr. $\{v + U \mid v \in V\}$

Beispiele in Faktorräumen

Im Potenzmengenraum $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $\mathbb{Z}_2$

Wie sehe die Elemente des Faktorraums $\underbrace{\mathcal{P}(\mathbb{N})}_{V} / \langle \mathbb{N} \rangle$ aus?

$$\langle \mathbb{N} \rangle = \{\alpha \cdot \mathbb{N} \mid \alpha \in \mathbb{Z}_2\}$$
$$= \{\mathbb{N}, \emptyset\}$$

$$\Rightarrow [M] = [M \triangle \mathbb{N}, M \triangle \emptyset] = \{\mathbb{N} \setminus M, M\} = [\mathbb{N} \setminus M]$$

Im Funktionenraum $(\mathbb{R}^{[\![1,\cancel{6}\,5]\!]}, +, \cdot)$ über $\mathbb{R}$

Welche Teilmenge(n) von $\{[e_x] \mid x \in [\![1, 5]\!]\}$ bilden eine Basis von $\underbrace{\mathbb{R}^{[\![1,5]\!]}}_{V} / \underbrace{\{f \mid f(\{1, 3\}) = \{0\}\}}_{U :=}$ über $\mathbb{R}$?

$U = \langle e_2, e_4, e_5 \rangle$

Erzeugung & L.U. recht offensichtlich

$[e_2] = [e_4] = [e_5] = 0$ in $\mathbb{R}^{[\![1,5]\!]} / U \Rightarrow ([e_1], [e_3])$ Basis

Lineare Abbildungen zwischen Faktorräumen

Ist die folgende Abbildung linear?

$$\mathbb{R}_5 \ni (v_1, \ldots, v_5) \mapsto \underbrace{[(3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1)]}_{[(3v_1, 0, 0, 0, 0)]} \in \mathbb{R}_5 \,/\, \langle e_2, e_5 \rangle \text{ über } \mathbb{R}.$$

Ja, Translation verschwindet im Faktorraum.

Kriegen wir das auch hier hin?

Gibt es einen Unterraum $U \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, so dass
$f \colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto [\mathbb{Q} \setminus M] \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \,/\, U$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$
linear ist? Man kann immer $U = V = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ rausfaktorisieren, dann ist f die Nullabbildung und damit linear. Aber es reicht $\langle \mathbb{Q} \rangle = \{\mathbb{Q}, \emptyset\}$

Dann $M \longmapsto [\mathbb{Q} \setminus M] = \{\mathbb{Q} \setminus M, M\} = [M]$ linear.

Es sei V ein K-Vektorraum und U, W Unterräume von V.

(1) Jedes Element aus $V\,/\,U$ ist zu U gleichmächtig.

Wahr, $v+U \cong U$ $\quad u \mapsto v+u$ Bijektion

(2) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, dann erzeugt $([v_i])_{i\in I}$ ganz $V\,/\,U$

Wahr $v = \sum \alpha_i v_i \Rightarrow [v] = [\sum \alpha_i v_i] = \sum \alpha_i [v_i]$

(3) Die Dimension von $V\,/\,U$ ist mindestens so groß, wie die von U.

Falsch, das läuft gegenläufig, $\dim V/V = 0$

(4) Die Dimension von $V\,/\,U$ ist höchstens so groß, wie die von V.

Wahr, siehe (2)

(5) Ist $U \subseteq W$, dann ist $V\,/\,W \subseteq V\,/\,U$

Falsch die Mengen haben i.A. nichts miteinander zu tun. Insbesondere ist

$U \in V/U$, $W \in V/W$ aber $U \notin V/W$, $W \notin V/U$

Lineare Abbildungen als Vektorraum

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Welche Dimension hat der Unterraum

$$\mathrm{Hom}(V,W)_U := \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Kern}(f) \supseteq U\}?$$

Es ist $\dim_K(\mathrm{Hom}(V,W)_U) = \mathrm{codim}(U) \cdot \dim(W)$. Nachweis: Es seien $(u_i)_{i=1..\dim(U)}$ Basis von U, $(v_i)_{i=1...\mathrm{codim}(U)}$ Basis eines Komplementären Unterraums und $(w_j)_{j=1..n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Basis von W. Dann gibt es für alle $v \in V$, $w \in W$ Darstellungen $v = \sum_{i=1}^{\mathrm{codim}(U)} \alpha_i(v) v_i + \sum_{i=1}^{\dim U} \tilde{\alpha}_i(v) u_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(w) w_j$

Lineare Abbildungen

Dann ist $\{f_{ij} := \sum_{j=1}^{n} \alpha_i(\cdot) w_j \mid i = 1,..,\mathrm{codim}(U), j = 1...n\}$ eine Basis. Die Darstellung von $f \in \mathrm{Hom}(V,W)_U$ ist:

$$f = \sum_{i=1}^{\mathrm{codim}\,U} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_{ij}}_{=: \beta_j(f(v_i))} f_{ij}$$

, denn es ist

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{codim}\,U} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}(v) = \sum_i \sum_j \beta_j(f(v_i)) \alpha_i(v) w_j = \sum_j \beta_j\left(\sum_i \alpha_i f(v_i)\right) w_j = f(v) \quad \forall v \in V$$

eindeutig.