Inhaltswoche 14: Vorlesungen am Mo und Do

Lineare Algebra I

Woche 12

23.01.2024 und 25.01.2024

Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Definition 17.1

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

1. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **strukturverträglich** oder ein **linearer Homomorphismus** oder eine **lineare Abbildung** von $(V, +_1, \cdot_1)$ in $(W, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$\text{Linearität}\left\{\begin{aligned} f(u +_1 v) &\overset{\text{Additivität}}{=} f(u) +_2 f(v) && \text{für alle } u, v \in V \\ f(\alpha \cdot_1 u) &\underset{\text{Homogenität}}{=} \alpha \cdot_2 f(u) && \text{für alle } u \in V \text{ und alle } \alpha \in K. \end{aligned}\right.$$

2. Im Fall $(V, +_1, \cdot_1) = (W, +_2, \cdot_2)$ sprechen wir von einem **linearen Endomorphismus**.

Definition 17.1

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

3. Ist $f\colon V \to W$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **linearer Isomorphismus**. In diesem Fall nennen wir $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ auch zueinander **isomorphe Vektorräume**:

$$(V, +_1, \cdot_1) \cong (W, +_2, \cdot_2).$$

isomorph

4. Im Fall $(V, +_1, \cdot_1) = (W, +_2, \cdot_2)$ und bijektivem $f\colon V \to W$ sprechen wir auch von einem **linearen Automorphismus**.

Definition 17.1

Es seien $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

5. Das **Bild** und der **Kern** eines Homomorphismus $f\colon V \to W$ sind definiert als

$$\operatorname{Bild}(f) := \left\{ f(u) \in W \,\middle|\, u \in V \right\} = f(V)$$
$$\operatorname{Kern}(f) := \left\{ u \in V \,\middle|\, f(u) = 0_W \right\} = f^{-1}(\{0_W\})$$

Ein lineares Homomorphismus $(V, +_1, \cdot_1) \to (W, +_2, \cdot_2)$ ist insbesondere ein Homomorphismus von abelschen Gruppen $(V, +) \to (W, +)$.

Beispiel 17.3

1. Die Transposition

$$\cdot^{\mathsf{T}} \colon K_n \ni x \mapsto x^{\mathsf{T}} \in K^n$$

linearer Isomorphismus

2. Die **Vektorisierung**

$$\mathrm{vec} \colon K^{n \times m} \ni A \mapsto \mathrm{vec}(A) \in K^{n\,m}$$

linearer Isomorphismus

definiert durch

$$\mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} | & & | \\ a_{\bullet 1} & \cdots & a_{\bullet m} \\ | & & | \end{bmatrix} \right) := \begin{pmatrix} a_{\bullet 1} \\ \vdots \\ a_{\bullet m} \end{pmatrix} \in K^{nm}$$

Beispiel 17.3

3. Die **Projektion auf die i-te Koordinate**

$$\pi_i \colon K^n \ni x \mapsto x_i \in K$$

$$\pi_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_i$$

ein surjektiver Homomorphismus
Für $n \geq 2$ nicht injektiv.

4. Die **Ableitungsabbildung**

$$\cdot' \colon \left\{ f \in \mathbb{R}^{(a,b)} \,\middle|\, f \text{ ist differenzierbar} \right\} \ni f \mapsto f' \in \mathbb{R}^{(a,b)}$$

ist ein Homomorphismus, nicht surjektiv,
nicht injektiv

Prototyp einer linearen Abbildung

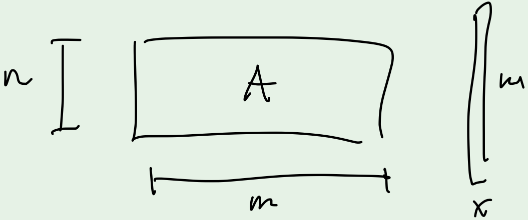
Beispiel 17.3

5. Es sei $A \in K^{n \times m}$ eine Matrix über einem Körper K. Dann ist die Matrix-Vektor-Multiplikation mit A

$$f_A : K^m \ni x \mapsto f_A(x) := A\,x \in K^n$$

eine $\boxed{\text{lineare}}$ Abbildung $K^m \to K^n$

$$\boxed{\begin{aligned} A(x+y) &= Ax+Ay \\ A(\alpha x) &= \alpha A x \end{aligned}}$$



Komposition linearer Abbildungen

Lemma 17.4

Es seien $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über demselben Körper K.

Sind $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ lineare Abbildungen, dann ist auch $f \circ g\colon U \to W$ eine lineare Abbildung.

Beweis. Hausaufgabe

$$\begin{tikzcd} W & V \arrow[l, "f"'] & U \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f \circ g"] \end{tikzcd}$$

Eigenschaften linearer Abbildungen

Lemma 17.5

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. $f(0) = 0$.

2. $f(-v) = -f(v)$.

3. $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, f(v_i)$. Das Bild einer LK ist die LK der Bilder.

   Menge aller LK aus E

4. Ist $E \subseteq V$, dann gilt $f\big(\langle E\rangle\big) = \big\langle f(E)\big\rangle$.

5. Ist $F = (v_i)_{i \in I}$, dann gilt $f\big(\langle F\rangle\big) = \big\langle f(F)\big\rangle$.

Eigenschaften linearer Abbildungen

Lemma 17.5

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

6. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum.
   Bild eines UR
7. Ist $Z \subseteq W$ ein Unterraum, dann ist $f^{-1}(Z) \subseteq V$ ein Unterraum.
   Urbild eines UR
8. Ist $M \subseteq V$ eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann ist auch $f(M) \subseteq W$ eine linear abhängige Menge von Vektoren.
   Lineare Abhängigkeit kann durch Abbilden nicht „repariert" werden.
9. Ist $F = (v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren in V, dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren.

Kern und Bild linearer Abbildungen

Lemma 17.6

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Weiter sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. $\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W. (Lemma 17.5)
2. f ist surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{Bild}(f) = W$ gilt. (klar)
3. $\overbrace{\operatorname{Kern}(f)}^{= f^{-1}(\{0_W\})}$ ist ein Unterraum von V. (Lemma 17.5)
4. f ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.

Siehe entsprechendes Resultat für Gruppenhomomorphismus.

Konstruktion linearer Abbildungen

Satz 17.7

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

2. Ist $B := (v_i)_{i \in I}$ eine $\boxed{\text{Basis von } V}$ und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie in W mit gleicher Indexmenge, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ mit der Eigenschaft $\boxed{f(v_i) = w_i}$ für alle $i \in I$.

Eine lineare Abbildung ist also bereits durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt.

   Diese Abbildung hat außerdem folgende Eigenschaften:

   a. $\operatorname{Bild}(f) = \langle (w_i)_{i \in I} \rangle$.
   b. f ist surjektiv genau dann, wenn $\langle (w_i)_{i \in I} \rangle = W$ gilt.
   c. f ist injektiv genau dann, wenn $(w_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist.
   d. f ist bijektiv genau dann, wenn $(w_i)_{i \in I}$ eine Basis von W ist.

Satz 17.7

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. evtl. noch keine Basis

1. Ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, dann gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Der Beweis für 1 benutzt den Basisergänzungssatz.

eine mögliche Basis

Beispiel 17.8

1. Es sei K ein Körper und $(e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis in K^m.
Eine lineare Abbildung $f\colon K^m \to K^n$ ist dadurch festgelegt,
dass wir die Bilder $f(e_1), \ldots, f(e_m) \in K^n$ angeben!

$$A := \begin{bmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_m) \end{bmatrix} \in K^{n \times m}$$

Für $x \in K^m$ ist

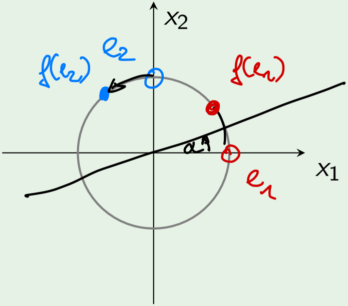
$$x = \sum_{j=1}^m x_j e_j \to \boxed{f(x)} = f\Big(\sum_{j=1}^m x_j e_j\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^m x_j \underbrace{f(e_j)}_{a_{\cdot j}} = \boxed{Ax}$$

$f = f_A$: Jede lin. Abb. $K^m \to K^n$ ist als Matrix-Vektor-Produkt darstellbar.

Beispiel 17.8 $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

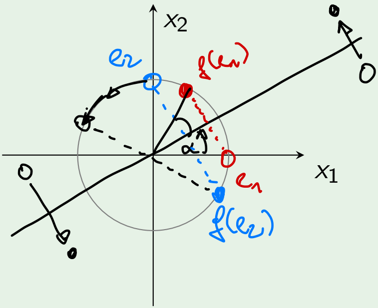
2. Drehung um den Winkel α:



$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Beispiel 17.8 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

3. Spiegelung an einer Achse durch den Ursprung:



$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

$f(e_1)$ $\quad$ $f(e_2)$

Beispiel 17.8

4. Es sei $K[t]$ der Polynomraum über einem Körper K. Die **Ableitungsabbildung** $f\colon K[t] \to K[t]$ ist ein linearer Endomorphismus, der durch die Festlegung

$t^{n-1} + \dots + t^{n-1}$

$$f(t^n) := \begin{cases} n\,t^{n-1} & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

$\{t^0, t^1, t^2, \dots\}$ Basis

einndeutig bestimmt ist.

surjektiv, nicht injektiv

$\operatorname{Ker} f = K_0[t]$

Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung

Lemma 17.9

1. Die **von $A \in K^{n \times m}$ induzierte lineare Abbildung**

$$f_A \colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) := A\,x \in K^n$$

ist eine lineare Abbildung $K^m \to K^n$.

2. Ist $f \colon K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n \times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.

3. Sind $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{A\,B}.$$

4. $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A \colon K^n \to K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Definition 17.10

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K.

1. $\boxed{\mathrm{Hom}_K(V, W)} := \{f : V \to W \mid f \text{ ist linearer Homomorphismus}\}$
2. $\boxed{\mathrm{End}_K(V)} := \{f : V \to V \mid f \text{ ist linearer Endomorphismus}\}$ $= \mathrm{Hom}(V, V)$
3. $\boxed{\mathrm{Iso}_K(V, W)} := \{f : V \to W \mid f \text{ ist linearer Isomorphismus}\}$
4. $\boxed{\mathrm{Aut}_K(V)} := \{f : V \to V \mid f \text{ ist linearer Automorphismus}\}$ $= \mathrm{Iso}(V, V)$

Der Vektorraum $\operatorname{Hom}(V, W)$ und der Ring $\operatorname{End}(V)$

Satz 17.11

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über demselben Körper K. Dann bildet $(\operatorname{Hom}(V, W), +, \cdot)$ mit der punktweisen Addition $+$ und der punktweisen S-Multiplikation $\cdot$ einen Vektorraum.

$$(f \underset{\text{in } \operatorname{Hom}(V,W)}{+} g)(v) := f(v) \underset{\text{in } W}{+} g(v) \qquad (\alpha \underset{\text{in } K \times \operatorname{Hom}(V,W)}{\cdot} f)(v) := \alpha \underset{\text{in } K \times W}{\cdot} f(v)$$

Satz 17.12

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper K. Dann bildet $(\operatorname{End}(V), +, \circ)$ mit der punktweisen Addition $+$ und der Komposition $\circ$ einen Ring mit dem Einselement id_V.

$$(f+g)(v) := f(v)+g(v) \qquad (f \circ g)(v) := f(g(v))$$

Faktorräume: Motivation

$g+N = N+g$

Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler der Gruppe $(G, +)$, so konnten wir auf der Faktormenge $G \,/\, N = \big\{[a] = a + N \,\big|\, a \in G\big\}$ eine Gruppenstruktur etablieren:

$$[a] \mathbin{\tilde{+}} [b] := [a + b]$$

kommutativ

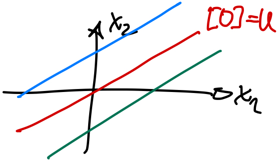
$(V, +)$

Untergruppe

Ist $U \subseteq V$ Unterräume des Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, so können wir auf der Faktormenge $V \,/\, U = \big\{[v] = v + U \,\big|\, v \in V\big\}$ eine Gruppen Vektorraum struktur etablieren:

$$[v_1] \mathbin{\tilde{+}} [v_2] := [v_1 + v_2]$$

$$\alpha \mathbin{\tilde{\cdot}} [v] := [\alpha \cdot v]$$



Idee: „gröbere Version" von V zu erzeugen

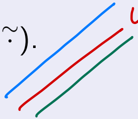
Satz 17.13

Es sei U ein Unterraum des Vektorraumes $(V, +, \cdot)$. Dann gilt:

1. Die Faktormenge $V \,/\, U = \big\{[v] = v + U \,\big|\, v \in V\big\}$ mit

Nullvektor $[0]$
add. Inv. $\tilde{-}[v] = [-v]$

$$[v_1] \mathbin{\tilde{+}} [v_2] := [v_1 + v_2]$$
$$\alpha \mathbin{\tilde{\cdot}} [v] := [\alpha \cdot v]$$



$U = [0]$
$\overline{\pi}$

bildet einen Vektorraum $(V \,/\, U, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$.

Vergröberungsabbildung

2. Die **kanonische Surjektion**

$$\pi : \begin{cases} V \to V \,/\, U \\ v \mapsto [v] \end{cases}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\pi) = U$.

Faktorräume

Beispiel 17.15

1. Ausfaktorisieren des trivialen Unterraumes $\{0\}$ aus V: $[v] = v + \{0\}$
   $V / \{0\} \cong V$

2. Ausfaktorisieren des trivialen Unterraumes V aus V: $[v] = v + V$
   $V / V \cong \{0\}$

3. Für $V = K[t]$ über einem Körper K und $U = K_0[t]$ (konstante Polynome) besteht der Faktorraum $V \,/\, U$ gerade aus den Äquivalenzklassen von Polynomen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$p \overset{U}{\sim} q \iff p \in q + U \iff \underbrace{p - q \in U}_{\text{Differenz ist konst. Polynom}}$$

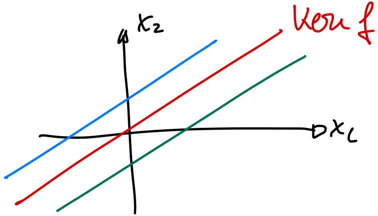
Satz 17.17 V, W Vektorräume

Weiter sei $f\colon V \to W$ ein linearer Homomorphismus.

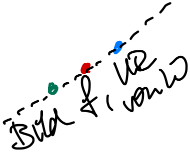
Dann ist

$$\begin{aligned} I\colon V\,/\,\mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [v] &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

ein linearer Isomorphismus.



$\xrightarrow{f}$ arbeitet Nebenklasse für Nebenklasse



Satz 17.17

$$\begin{aligned} I\colon V\,/\,\mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [v] &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$ ist linearer Isomorphismus

Beweis. $f\colon (V,+) \to (W,+)$ ist Gruppenhomomorphismus.
$\mathrm{Kern}(f) = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$ ändert sich dadurch nicht.

Homomorphiesatz für Gruppen: $\underbrace{(V,+)}_{\text{abelsch!}} / \mathrm{Kern}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$

als Gruppen mit dem Isomorphismus $I\colon [v] \mapsto f(v)$.

I ist auch Vektorraumisomorphismus, also homogen!

$I(\alpha \,\tilde{\cdot}\, [v]) = I([\alpha v]) = f(\alpha v)$

$= \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot I([v])$

Beispiel 17.18

1. $f = \pi_1 : K^n \to K$ Projektion auf 1. Koordinate

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$$

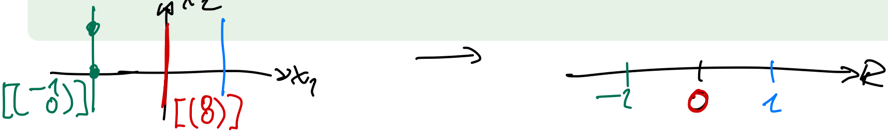
$$\operatorname{Ker} f = \{x \in K^n : f(x) = x_1 = 0\}$$

„großer" Kern $\dim(\operatorname{Ker} f) = n-1$

$$I: K^n / \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\text{iso}} \operatorname{Bild}(f) = K$$

$$[x] = x + \operatorname{Ker} f \mapsto x_1$$

Die Koordinaten $x_2, \dots, x_n$ werden ausfaktorisiert.



Beispiel 17.18

2. f = Ableitungsabbildung $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ (Endomorphismus)

$\mathrm{Kern}(f) = \mathbb{R}_0[t]$ (konstante Polynome) „kleiner Kern"

$$I: \quad \mathbb{R}[t] / \mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{\text{iso}} \mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}[t]$$
$$[p] = p + \mathbb{R}_0[t] \longmapsto f(p)$$

Die konstanten Polynome werden ausfaktorisiert.