Lineare Algebra I

Woche 11

15.01.2024 und 18.01.2024

Lemma 15.30

$(K^{n \times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring mit dem Einselement I_n, genannt der **Matrixring** der $n \times n$-Matrizen. Für $n \geqslant 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ.

Beweis.

obere und untere Dreiecksmatrizen

Definition 15.31

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt

1. **obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt.
2. **strikte obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \geqslant j$ gilt.
3. **untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt.
4. **strikte untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \leqslant j$ gilt.
5. **nilpotent**, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit der Eigenschaft $A^k = 0$.

obere und untere Dreiecksmatrizen

Beispiel 15.32

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

strikte obere Dreiecksmatrizen sind nilpotent

Lemma 15.33

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede strikte obere und jede strikte untere Dreiecksmatrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $A^n = 0$.

Beweis. Hausaufgabe

Lemma 15.35

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

1. $K_{\diagdown}^{n \times n}$, $K_{\triangledown}^{n \times n}$ und $K_{\triangle}^{n \times n}$ bilden jeweils einen Unterring mit Eins von $K^{n \times n}$.
2. Die strikten oberen und strikten unteren Dreiecksmatrizen bilden einen Unterring (aber keinen Unterring mit Eins) von $K^{n \times n}$.

Definition 15.36

1. $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar** oder **regulär**, wenn es eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft

$$A\,B = I \quad \text{und} \quad B\,A = I$$

B heißt die zu A **inverse Matrix**, kurz: $B = A^{-1}$.

2. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ heißt die **allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über dem Körper K**:

$$\mathrm{GL}(n, K) := \big\{ A \in K^{n \times n} \,\big|\, A \text{ ist invertierbar} \big\}.$$

Beispiel 15.37

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & -9 & 17 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

   sind Inverse voneinander.

2. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3} \text{ hat keine Inverse.}$$

Theorem 15.38

1. Ist A invertierbar, dann gelten die **Kürzungsregeln**

$$\begin{aligned} A\,B_1 = A\,B_2 \quad &\Rightarrow \quad B_1 = B_2 \\ B_1\,A = B_2\,A \quad &\Rightarrow \quad B_1 = B_2 \end{aligned}$$

2. Ist A invertierbar, dann gilt

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. Sind A und B invertierbar, dann auch $A\,B$, und es gilt

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

4. Ist A invertierbar, dann auch A^T, und es gilt

$$(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$$

Invertierbarkeit von Matrizen in Zeilenstufenform

Theorem 15.40

Es seien $A \in K^{n \times n}$ und C eine Zeilenstufenform zu A.

Dann sind äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = n$.
3. C ist invertierbar.
4. Es gilt $\operatorname{Rang}(C) = n$.
5. C hat keine Nullzeilen und keine Nullspalten.

Multiplikation mit invertierbaren Matrizen

Folgerung 15.41

Für beliebige Matrizen $A \in K^{n \times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n \times n}$, $C \in K^{m \times m}$ gilt:

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) = \operatorname{Rang}(A).$$

Beweis. Hausaufgabe

Rechtsinverse sind Linksinverse und umgekehrt

Theorem 15.42

Für $A, B \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

1. B ist eine Rechtsinverse von A, d. h., es gilt $A\,B = I_n$.
2. B ist eine Linksinverse von A, d. h., es gilt $B\,A = I_n$.
3. B ist die Inverse von A, d. h., es gilt $A\,B = B\,A = I_n$.

Beweis.

Definition 16.1

Es seien $A \in K^{n \times m}$ und $b \in K^n$.

1. Eine Gleichung der Form $A\,x = b$ mit unbekanntem Vektor x heißt ein **lineares Gleichungssystem**.
2. Das LGS heißt **homogen** im Fall $b = 0$, andernfalls **inhomogen**.
3. Die **Lösungsmenge** ist $\mathcal{L}(A, b) := \big\{x \in K^m \,\big|\, A\,x = b\big\}$.
4. Das LGS heißt **lösbar**, wenn $\mathcal{L}(A, b) \neq \emptyset$, andernfalls **unlösbar**.

Gesucht ist ein Polynom $p = c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2 \in \mathbb{Z}_5[t]$, dessen zugehörige Polynomfunktion $\widetilde{p}$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\widetilde{p}(0) = 3, \quad \widetilde{p}(1) = 7, \quad \widetilde{p}(3) = 4$$

Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Theorem 16.3

1. $\mathcal{L}(A, 0)$ ist ein Unterraum von K^m der Dimension $m - \operatorname{Rang}(A)$.

Beweis.

Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Theorem 16.3

2. Ist x_0 irgendeine „**partikuläre**“ **Lösung** von $A\,x = b$, dann gilt

$$\mathcal{L}(A, b) = x_0 + \mathcal{L}(A, 0).$$

Beweis.

Theorem 16.3

3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   a. $A\,x = b$ ist lösbar.
   b. $b \in \mathrm{SR}(A)$.
   c. $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A, b])$.

Beweis.

Theorem 16.3

4. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   a. $A\,x = b$ ist eindeutig lösbar.
   b. $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}([A, b]) = m$.

Beweis.

Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Theorem 16.3

5. Ist A quadratisch, gilt also $m = n$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
   a. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.
   b. $Ax = c$ ist für jedes $c \in K^n$ eindeutig lösbar.
   c. A ist invertierbar.

   In diesem Fall ist $x = A^{-1}b$ die eindeutige Lösung.

Beispiel 16.7

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Lösung linearer Gleichungssysteme

Beispiel 16.7

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \color{red}{4} & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Lösung linearer Gleichungssysteme

Beispiel 16.7

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

reduzierte Zeilenstufenform

Definition 16.5

$A \in K^{n \times m}$ heißt in **reduzierter Zeilenstufenform**, wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:

1. Alle Pivot-Elemente sind gleich 1.
2. In einer Spalte oberhalb eines Pivot-Elements stehen nur Nullen.

Berechnung der inversen Matrix

Beispiel 16.8

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$