Plenarübung am Di, 16.01. entfällt !

Lineare Algebra I

Woche 11

15 ~~16~~.01.2024 und 18 ~~19~~.01.2024

Mo Do

Quadratische Matrizen

Lemma 15.30 $n \in \mathbb{N}_0$

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring mit dem Einselement I_n, genannt der **Matrixring** der $n \times n$-Matrizen. Für $n \geqslant 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ.

Beweis.
- $(K^{n\times n}, +)$ ist abelsche Gruppe ✓
- $(K^{n\times n}, \cdot)$ ist Halbgruppe; Assoziativität (Lemma 15.8) ✓
- Distributivgesetze

$$\left.\begin{aligned} A(B_1+B_2) &= AB_1 + AB_2 \quad ✓ \\ (A_1+A_2)B &= A_1B + A_2B \quad ✓ \end{aligned}\right\} \text{Lemma 15.8}$$

- $IA = AI = A$ ✓ Lemma 15.8
- $\underbrace{E_{11}E_{12} = E_{12} \quad \text{und} \quad E_{12}E_{11} = 0}_{\neq}$

Definition 15.31 $n \in \mathbb{N}$

unterhalb der Hauptdiagonale

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt

1. **obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $\boxed{i > j}$ gilt. $K^{n\times n}_{\triangledown}$
2. **strikte obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \geqslant j$ gilt.
3. **untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt. $K^{n\times n}_{\triangle}$
4. **strikte untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \leqslant j$ gilt.
5. **nilpotent**, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit der Eigenschaft $A^k = 0$.

Beispiel 15.32

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix

2. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ strikte untere Dreiecksmatrix

3. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

strikte obere Dreiecksmatrizen sind nilpotent

Lemma 15.33

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede strikte obere und jede strikte untere Dreiecksmatrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $A^n = 0$.

Beweis. Hausaufgabe

Lemma 15.35

$(K^{n\times n}_{\urtriangle}, +)$ ist Untergruppe von $(K^{n\times n}, +)$

$(K^{n\times n}_{\urtriangle}, \cdot)$ ist abgeschlossen

$I \in K^{n\times n}_{\urtriangle}$

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

1. $K_{\diagdown}^{n \times n}$, $K_{\urtriangle}^{n \times n}$ und $K_{\lltriangle}^{n \times n}$ bilden jeweils einen Unterring mit Eins von $K^{n \times n}$.
   sogar kommutativ!
2. Die strikten oberen und strikten unteren Dreiecksmatrizen bilden einen Unterring (aber keinen Unterring mit Eins) von $K^{n \times n}$.

invertierbares Element (Einheit) der Halbgruppe $(K^{n\times n}, \cdot)$

Definition 15.36

1. $A \in K^{n\times n}$ heißt **invertierbar** oder **regulär**, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt mit der Eigenschaft

$$A\,B = I \quad \text{und} \quad B\,A = I$$

   B heißt die zu A **inverse Matrix**, kurz: $B = A^{-1}$.

2. Die Menge der invertierbaren Matrizen in $K^{n\times n}$ heißt die **allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über dem Körper K**:

$$\mathrm{GL}(n, K) := \left\{ A \in K^{n\times n} \,\middle|\, A \text{ ist invertierbar} \right\}.$$

Einheitengruppe von $(K^{n\times n}, \cdot)$

Beispiel 15.37

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & -9 & 17 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

   sind Inverse voneinander.

2. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3} \text{ hat keine Inverse.}$$ in $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ aber schon

ZSF: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Satz 15.40

ZSF: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Satz 15.40

Rechenregeln für Inverse

Theorem 15.38 Alle Matrizen in $K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$

1. Ist A invertierbar, dann gelten die **Kürzungsregeln**

$$A\,B_1 = A\,B_2 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$
$$B_1\,A = B_2\,A \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$

2. Ist A invertierbar, dann gilt

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. Sind A und B invertierbar, dann auch $A\,B$, und es gilt

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

4. Ist A invertierbar, dann auch A^T, und es gilt

$$(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$$ Schreibe auch $A^{-\mathsf{T}}$

Invertierbarkeit von Matrizen in Zeilenstufenform

$\in K^{n \times n}$

z.B. $\begin{bmatrix} * & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Theorem 15.40

Es seien $A \in K^{n \times n}$ und C eine Zeilenstufenform zu A.

Dann sind äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = n$. Alle Zeilen sind lin. unabhängig. Alle Spalten — " — " — " —
3. C ist invertierbar.
4. Es gilt $\operatorname{Rang}(C) = n$. Es gibt n Pivot-Elemente
5. C hat keine Nullzeilen und keine Nullspalten.

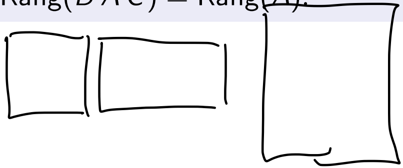
Multiplikation mit invertierbaren Matrizen

Folgerung 15.41

Für beliebige Matrizen $A \in K^{n \times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n \times n}$, $C \in K^{m \times m}$ gilt:

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) = \operatorname{Rang}(A).$$

Beweis. Hausaufgabe



Rechtsinverse sind Linksinverse und umgekehrt

Theorem 15.42

Für $A, B \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

1. B ist eine Rechtsinverse von A, d. h., es gilt $A\,B = I_n$.
2. B ist eine Linksinverse von A, d. h., es gilt $B\,A = I_n$.
3. B ist die Inverse von A, d. h., es gilt $A\,B = B\,A = I_n$.

Beweis. ① $\Rightarrow$ ② $\quad AB = I$

$\Rightarrow \quad n = \text{Rang}(I) = \text{Rang}(AB)$

$\leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\} \leq n$

$\Rightarrow$ Alle $\leq$ sind $=$! $\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = n$

Satz 15.40 $\Rightarrow$ A, B sind invertierbar!

$AA^{-1} = I$ und $AB = I$ (kürzen) $\Rightarrow A^{-1} = B$.

② $\Rightarrow$ ① analog ; ③ $\Rightarrow$ ① und ③ $\Rightarrow$ ② klar

lineare Gleichungssysteme

Koeff.-matrix

rechte Seite

Definition 16.1

Es seien $A \in K^{n \times m}$ und $b \in K^n$

1. Eine Gleichung der Form $\boxed{A\,x = b}$ mit unbekanntem Vektor x heißt ein **lineares Gleichungssystem**. (LGS)
2. Das LGS heißt **homogen** im Fall $b = 0$, andernfalls **inhomogen**.
3. Die **Lösungsmenge** ist $\mathcal{L}(A,b) := \{x \in K^m \mid A\,x = b\}$.
4. Das LGS heißt **lösbar**, wenn $\mathcal{L}(A,b) \neq \emptyset$, andernfalls **unlösbar**.

Gleichung Nr. i

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

zu Variable Nr. j (x_j)

Gesucht ist ein Polynom $p = c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2 \in \mathbb{Z}_5[t]$, dessen zugehörige Polynomfunktion $\widetilde{p}$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\widetilde{p}(0) = 3, \quad \widetilde{p}(1) = \overset{2}{\cancel{7}}, \quad \widetilde{p}(3) = 4$$

Interpolationsaufgabe

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

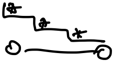
Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Anzahl Unbekannte

Theorem 16.3 homogenes LGS $Ax=0$

1. $\mathcal{L}(A,0)$ ist ein Unterraum von K^m der Dimension $m - \underbrace{\operatorname{Rang}(A)}$.

Anzahl relevanter Gleichungen



Beweis. UR-Kriterium: $x,y \in \mathcal{L}(A,0)$, also $Ax = Ay = 0$. $\Rightarrow A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$.

Es sei $\hat{C}$ eine ZSF zu A. Es gilt $Ax=0$ $\Leftrightarrow \hat{C}x = 0 \Leftrightarrow Cx=0$ mit $C \in K^{r \times m}$ mit $r = \operatorname{Rang}(A)$ durch Streichen der Nullzeilen in $\hat{C}$.

Bestimme eine Basis von $\mathcal{L}(A,0) = \mathcal{L}(C,0)$:

Beispiel: $m=5$, $r=2$:

unabh. Variable

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

in $\mathbb{Z}_5$

abhängige Variable

Basis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}(A,0)$ hat 5^3 Elemente.

$2x_4 + 4x_5 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_4 = -4x_5 \Leftrightarrow x_4 = 3x_5$

Theorem 16.3

2. Ist x_0 irgendeine „**partikuläre**" **Lösung** von $Ax = b$, dann gilt

$$\mathcal{L}(A, b) = x_0 + \mathcal{L}(A, 0).$$

verschobener Unterraum

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(A,b) := \dim \mathcal{L}(A,0)}$$

Beweis.

$$x \in \mathcal{L}(A,b)$$
$$\iff Ax = b$$
$$\iff A(x - x_0) = b - b = 0$$
$$\iff x - x_0 \in \mathcal{L}(A,0)$$
$$\iff x \in x_0 + \mathcal{L}(A,0)$$

Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Theorem 16.3

3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   a. $A\,x = b$ ist lösbar.
   b. $b \in \mathrm{SR}(A)$.
   c. $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(\underbrace{[A, b]}_{\text{erweiterte Koeff. matrix}})$.

Beweis.

Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Theorem 16.3

4. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   a. $A\,x = b$ ist eindeutig lösbar.
   b. $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}([A, b]) = m$.

Beweis.

Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit

Theorem 16.3

5. Ist A quadratisch, gilt also $m = n$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
   a. $A\,x = b$ ist eindeutig lösbar.
   b. $A\,x = c$ ist für jedes $c \in K^n$ eindeutig lösbar.
   c. A ist invertierbar.

   In diesem Fall ist $x = A^{-1}b$ die eindeutige Lösung.

$$Ax = b \iff A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$\iff x = A^{-1}b$$

Beispiel 16.7 in $\mathbb{Z}_5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 1 \end{array}\right]$$

ZSF erreicht

$\mathrm{Rang}(A) = 3$

$\mathrm{Rang}([A, b]) = 3 = m$ $\Rightarrow$ eindeutig lösbar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 3 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \cdot 2$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 16.7

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \end{array}\right] 4$$

unabh. Variable

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] 3$$

ZSF erreicht

$\operatorname{Rang}(A) = 2$

$\operatorname{Rang}([A, b]) = 2$

$\dim \mathcal{L}(A, 0) = 3 - 2 = 1$

abh. Variablen

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Beispiel 16.7

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

partikuläre Lösung!

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$

$x_3 = 3$

$x_1 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Basis von $\mathcal{L}(A, 0)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 1$

$x_3 = 0$

$x_1 = 2$

$$\mathcal{L}(A, b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\infty \text{ Elemente}} \rangle = \{ - - \}$$

reduzierte Zeilenstufenform

Definition 16.5

$A \in K^{n \times m}$ heißt in **reduzierter Zeilenstufenform**, wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:

1. Alle Pivot-Elemente sind gleich 1.
2. In einer Spalte oberhalb eines Pivot-Elements stehen nur Nullen.

$AX = I \iff X = A^{-1}$

Beispiel 16.8

drei rechte Seiten gleichzeitig, hier: die Spalten von I_3

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$