Lineare Algebra I

Woche 10

10.01.2024 und 12.01.2024

Matrizen

Definition 15.1

Eine $n \times m$-**Matrix** über dem Körper K ist eine endliche, doppelt indizierte Familie von Elementen aus K:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Die k-te **Diagonale** wird gebildet von Indizes (i, j) mit
- Eine **Diagonalmatrix** hat
- Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn
- Die $n \times n$-**Einheitsmatrix** ist

Zeilen- und Spaltenvektoren

Eine Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

hat die **Zeilenvektoren** bzw. **Spaltenvektoren**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Vektorraum der $n \times m$-Matrizen

Addition von Matrizen $A + B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

skalare Multiplikation $\alpha\, A$ mit $\alpha \in K$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \cdots & \alpha\, a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{n1} & \cdots & \alpha\, a_{nm} \end{bmatrix}$$

Vektorraum der $n \times m$-Matrizen

Addition $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

skalare Multiplikation $$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \cdots & \alpha\, a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{n1} & \cdots & \alpha\, a_{nm} \end{bmatrix}$$

Lemma 15.3

$K^{n \times m}$ mit obigen Verknüpfungen ist ein Vektorraum der Dimension $n\,m$ über K. Neutrales Element von $(K^{n \times m}, +)$ ist die **Nullmatrix**.

Beweis.

Multiplikation von Matrizen

Beispiel 15.6

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen: Spaltensicht

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{\bullet j} \quad b_{jk} \quad = \quad c_{\bullet k}$$

Beispiel

Wie erhalten wir $\begin{bmatrix} \text{erste Spalte} & \text{drei Mal} \\ \text{minus zweite Spalte} & \text{zweite Spalte} \end{bmatrix}$ von $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen: Zeilensicht

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad b_{j\bullet} = c_{i\bullet}$$

Beispiel

Wie erhalten wir $\begin{bmatrix} \text{zwei Mal erste Zeile minus zweite Zeile} \\ \text{minus zweite Zeile plus dritte Zeile} \end{bmatrix}$ von $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Eigenschaften der Matrix-Multiplikation

Lemma 15.8

$$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$$

$$I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$$

Matrix-Vektor- und Vektor-Matrix-Multiplikation

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilen- und Spaltenraum

Definition 15.10

1. Der **Zeilenraum** einer Matrix ist die lin. Hülle der Zeilenvektoren:

2. Der **Zeilenrang** $\operatorname{ZRang}(A) := \dim(\operatorname{ZR}(A))$

3. Der **Spaltenraum** einer Matrix ist die lin. Hülle der Spaltenvektoren:

4. Der **Spaltenrang** $\operatorname{SRang}(A) := \dim(\operatorname{SR}(A))$

Zeilen- und Spaltenraum

Beispiel 15.11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Zeilenrang = Spaltenrang

Theorem 15.12

$$0 \leqslant \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$$

Beweis.

Zeilenrang = Spaltenrang

Theorem 15.12

$$0 \leqslant \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$$

Beweis.

Rangfaktorisierung

Folgerung 15.13

Ist $r = \operatorname{Rang}(A)$, dann existieren $B \in K^{n \times r}$ und $C \in K^{r \times m}$, sodass gilt:

$$A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Die Spalten von B bilden eine Basis von $\operatorname{SR}(A)$.
Die Zeilen von C bilden eine Basis von $\operatorname{ZR}(A)$.

Rang des Produkts von Matrizen

Theorem 15.14

Für $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times \ell}$ gilt:

$$0 \leqslant \operatorname{Rang}(A\,B) \leqslant \min\{\operatorname{Rang}(A),\ \operatorname{Rang}(B)\} \leqslant \min\{\ell, m, n\}$$

Beweis.

Elementare Zeilenumformungen

Typ I

$$D := \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$D\,A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Typ II

$$S := \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$S\,A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Typ III

$$T := \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$T\,A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Zeilenstufenform

Lemma 15.16

Entsteht C aus A durch elementare Zeilenumformungen, dann gilt $\operatorname{ZR}(C) = \operatorname{ZR}(A)$ und $\operatorname{Rang}(C) = \operatorname{Rang}(A)$.

Definition 15.17

$A \in K^{n \times m}$ heißt in **Zeilenstufenform**, wenn gilt:

1. Es gibt eine Zahl $r \in [\![0, m]\!]$, sodass $a_{1\bullet}, \ldots, a_{r\bullet}$ keine Nullzeilen sind und $a_{r+1\bullet}, \ldots, a_{m\bullet}$ sämtlich Nullzeilen sind.
2. Ist $j_i := \min\{j \in [\![1, n]\!] \mid a_{ij} \neq 0\}$ der niedrigste Spaltenindex in Zeile $i \in [\![1, r]\!]$, in der ein Eintrag ungleich 0 steht, dann gilt die **Stufenbedingung** $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

Zeilenstufenform

Beispiel 15.19

Besetzungsmuster einiger Matrizen in Zeilenstufenform mit

$$\star \in K \setminus \{0\} \quad (\textbf{Pivot-Element}) \quad \text{und} \quad ? \in K.$$

$$\begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Erzeugen einer Zeilenstufenform

Beispiel 15.22

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} & & & \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & \\ \\ \\ \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} & & & \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Rangfaktorisierung

Im Beispiel haben wir folgende elementare Zeilenumformungen gemacht:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{E_3 \\ \text{(Typ II)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{E_2 \\ \text{(Typ II)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{E_1 \\ \text{(Typ III)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C}.$$

Wenn es Matrizen E_3', E_2', E_1' gäbe mit der Eigenschaft $E_j' \, E_j = I_3$, so könnten wir die Gleichung umschreiben als

$$\begin{aligned} A &= E_1' \, E_2' \, E_3' \qquad\qquad C \\ &=: \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Transposition von Matrizen

Definition 15.24

Zu $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ heißt $A^\mathsf{T} = (a_{ji}) \in K^{m \times n}$ die **transponierte Matrix**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rechenregeln für Transponierte

Lemma 15.26

$$
\begin{aligned}
(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} &= A \\
(A + B)^\mathsf{T} &= A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T} \\
(\alpha\, A)^\mathsf{T} &= \alpha\, A^\mathsf{T} \\
(A\, C)^\mathsf{T} &= C^\mathsf{T} A^\mathsf{T}
\end{aligned}
$$

Lemma 15.27

$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^\mathsf{T})$

Definition 15.28

1. $A \in K^{n \times n}$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^\mathsf{T}$ gilt.
2. $A \in K^{n \times n}$ heißt **antisymmetrisch**, wenn $A = -A^\mathsf{T}$ gilt.

Lemma 15.29

Für Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) &= \frac{1}{2} n\,(n+1) \\ \dim(K^{n\times n}_{\text{skew}}) &= \frac{1}{2} n\,(n-1) \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{skew}}$$

Beweis. Hausaufgabe