Infos zu den Klausuren auf der Webseite

Lineare Algebra I

Woche 10

10.01.2024 und 12.01.2024

nächste Woche

- Vorlesung am Mo, 15.01. 14:15 – 15:45
- Plenarübung am Di, 16.01. 9:30 – 11:00

Matrizen

Definition 15.1 $n, m \in \mathbb{N}_0$

Eine $n \times m$-**Matrix** über dem Körper K ist eine endliche, doppelt indizierte Familie von Elementen aus K:

Spaltenindex j

$$\begin{array}{c} \text{Zeilenindex } i \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$$

$k=1$ $k=0$ $k=-1$

$k=0$ Hauptdiagonale

- Die k-te **Diagonale** wird gebildet von Indizes (i, j) mit $j - i = k$
- Eine **Diagonalmatrix** hat alle Einträge außerhalb der HD gleich 0.
- Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn $m = n$ gilt.
- Die $n \times n$-**Einheitsmatrix** ist $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Zeilen- und Spaltenvektoren

Eine Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

hat die **Zeilenvektoren** bzw. **Spaltenvektoren**

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a_{1\cdot} \\ \\ \\ a_{n\cdot} \end{array} \end{array} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_{\cdot 1} & & & a_{\cdot m} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_{i\cdot} \in K_m$ $\qquad$ $a_{\cdot j} \in K^n$

Vektorraum der $n \times m$-Matrizen

Addition von Matrizen $A + B$ (gleiche Größe)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

skalare Multiplikation $\alpha\, A$ mit $\alpha \in K$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \cdots & \alpha\, a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{n1} & \cdots & \alpha\, a_{nm} \end{bmatrix}$$

Vektorraum der $n \times m$-Matrizen

Addition $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$

skalare Multiplikation $\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \cdots & \alpha\, a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{n1} & \cdots & \alpha\, a_{nm} \end{bmatrix}$

Lemma 15.3

$K^{n\times m}$ mit obigen Verknüpfungen ist ein Vektorraum der Dimension $n\,m$ über K. Neutrales Element von $(K^{n\times m}, +)$ ist die **Nullmatrix**.

Beweis. $(K^{n\times m}, +)$ abelsche Gruppe, Nullmatrix $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $1 \cdot A = A$

Standardbasis

$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

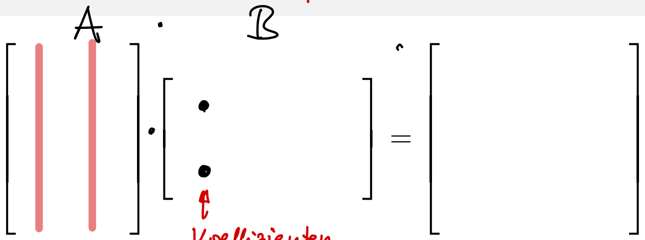
Beispiel 15.6

Kompatibilität

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + (-3)\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-2) & \cdots \\ 2\cdot 5 + 4\cdot 0 & 2\cdot 2 + 4\cdot(-2) & \cdots \\ 5\cdot 5 + 0\cdot 0 & \cdots & \cdots \\ -3\cdot 5 + (-6)\cdot 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -28 \\ 10 & -4 & 24 \\ 25 & 10 & -20 \\ -15 & 6 & -36 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen: Spaltensicht



Koeffizienten

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{\bullet j} \qquad b_{jk}}_{\text{k-te LK der Spalten von A}} \qquad = \qquad c_{\bullet k}$$

Beispiel

Wie erhalten wir $\begin{bmatrix} \text{erste Spalte} & \text{drei Mal} \\ \text{minus zweite Spalte} & \text{zweite Spalte} \end{bmatrix}$ von $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen: Zeilensicht

Koeffizienten →

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & \bullet \\ & \\ & \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, b_{j\bullet}}_{\text{i-te LK der Zeilen von } \mathbb{B}} = c_{i\bullet}$$

Beispiel

Wie erhalten wir $\begin{bmatrix} \text{zwei Mal erste Zeile minus zweite Zeile} \\ \text{minus zweite Zeile plus dritte Zeile} \end{bmatrix}$ von $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Lemma 15.8

$$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$ Distributivgesetz

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$ —"—

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$ Assoziativgesetz

$$A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$$ Skalare egal wo

$$I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$$ Einheitsmatrix ist neutral

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor- und Vektor-Matrix-Multiplikation

nur eine LK
der Spalten
von A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

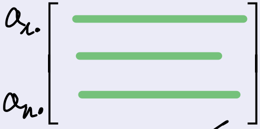
nur eine LK
der Zeilen von A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{y} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 15.10

Menge aller LK

1. Der **Zeilenraum** einer Matrix ist die $\boxed{\text{lin. Hülle}}$ der Zeilenvektoren:

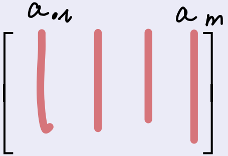


$$ZR(A) := \langle a_{1\cdot}, \dots, a_{n\cdot} \rangle \subseteq K_m$$

max. Anzahl linear unabh. Zeilen von A

2. Der **Zeilenrang** $0 \le \operatorname{ZRang}(A) := \dim(ZR(A)) \le n$

3. Der **Spaltenraum** einer Matrix ist die $\boxed{\text{lin. Hülle}}$ der Spaltenvektoren:



$$SR(A) := \langle a_{\cdot 1}, \dots, a_{\cdot m} \rangle \subseteq K^n$$

max. Anzahl linear unabh. Spalten von A

4. Der **Spaltenrang** $0 \le \operatorname{SRang}(A) := \dim(SR(A)) \le m$

Zeilen- und Spaltenraum

Beispiel 15.11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

- $ZR(A) = \langle \underbrace{(2,3,-1),\ (7,4,0)}_{\text{linear unabhängig}} \rangle$

  $ZRang(A) = \dim ZR(A) = 2$

- $SR(A) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{linear abhängig}} \rangle = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{linear unabh.}} \rangle$

  $SRang(A) = \dim SR(A) = 2$

Zeilenrang = Spaltenrang

Theorem 15.12

klar klar

$$0 \leqslant \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$$

Beweis. $\mathrm{SRang}(A) \le \mathrm{ZRang}(A)$! Es sei $r \overset{!}{=} \mathrm{ZRang}(A) \in \mathbb{N}_0$.

Es sei $C \in K^{r \times m}$ mit $C = \begin{bmatrix} c_{1\cdot} \\ \vdots \\ c_{r\cdot} \end{bmatrix}$ zeilenweise Basis von $ZR(A)$. $a_{i\cdot} \in ZR(A)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} — a_{1\cdot} — \\ \vdots \\ — a_{i\cdot} — \\ \vdots \\ — a_{n\cdot} — \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{i1} & \cdots & b_{ir} \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}}^{r}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} — c_{1\cdot} — \\ \vdots \\ c_{r\cdot} — \end{bmatrix}}_{C} \Big\} r$$

bel. LK-Koeff.-Vektor x

$\le \mathrm{SRang}(B)$

$$Ax = B(Cx) \Rightarrow SR(A) \le SR(B) \Rightarrow \mathrm{SRang}(A) \le r = \mathrm{ZRang}(A)$$

Jede LK der Spalten von A ist auch LK der Spalten von B

Theorem 15.12

$$0 \leqslant \overbrace{\mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A)}^{\mathrm{Rang}(A)} \leqslant \min\{m, n\}$$

Beweis. $\mathrm{ZRang}(A) \le \mathrm{SRang}(A)$: Es sei $s := \mathrm{SRang}(A)$

$B := \begin{bmatrix} | & & | \\ b_{\bullet 1} & \cdots & b_{\bullet s} \\ | & & | \end{bmatrix}$ spaltenweise Basis von $\mathrm{SR}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_{\bullet 1} & \cdots & a_{\bullet m} \\ | & & | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ b_{\bullet 1} & \cdots & b_{\bullet s} \\ | & & | \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sm} \end{bmatrix}}_{C}$$

$yA = (yB)C$

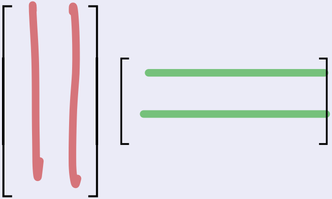
$\Rightarrow \mathrm{ZR}(A) \le \mathrm{ZR}(C)$

$\Rightarrow \mathrm{ZRang}(A) \le \mathrm{ZRang}(C) \le s = \mathrm{SRang}(A).$

Rangfaktorisierung

Folgerung 15.13

Ist $r = \operatorname{Rang}(A)$, dann existieren $B \in K^{n \times r}$ und $C \in K^{r \times m}$, sodass gilt:

$A =$ 

Die Spalten von B bilden eine Basis von $\operatorname{SR}(A)$.
Die Zeilen von C bilden eine Basis von $\operatorname{ZR}(A)$.

Rang des Produkts von Matrizen

Theorem 15.14

Für $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times \ell}$ gilt:

$$0 \leqslant \operatorname{Rang}(A\,B) \leqslant \min\{\operatorname{Rang}(A),\ \operatorname{Rang}(B)\} \leqslant \min\{\ell, m, n\}$$

Beweis.

Elementare Zeilenumformungen (verändern den Zeilenraum nicht)

Typ I

$$D := \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha^{\neq 0} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \end{array}$$

Typ II

$$S := \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ \alpha & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} j & & & & \end{array} & \end{array}$$

Typ III

$$T := \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 \ddots 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

$$D\,A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \\ — \alpha\, a_{i\cdot} — \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$S\,A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \\ \alpha\, a_{j\cdot} + a_{i\cdot} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$T\,A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \\ — a_{j\cdot} — \\ — a_{i\cdot} — \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \end{array} \end{array}$$

$A \in K^{n \times m}$, $D, S, T \in K^{n \times n}$

Zeilenstufenform

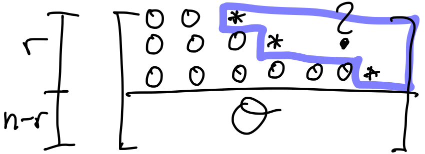
Lemma 15.16

Entsteht C aus A durch elementare Zeilenumformungen, dann gilt $\mathrm{ZR}(C) = \mathrm{ZR}(A)$ und $\mathrm{Rang}(C) = \mathrm{Rang}(A)$.

Definition 15.17

$A \in K^{n \times m}$ heißt in **Zeilenstufenform**, wenn gilt:

1. Es gibt eine Zahl $r \in [\![0, \cancel{m}\ n]\!]$, sodass $a_{1\bullet}, \dots, a_{r\bullet}$ keine Nullzeilen sind und $a_{r+1\bullet}, \dots, a_{\cancel{m}\ n\bullet}$ sämtlich Nullzeilen sind.
2. Ist $j_i := \min\{j \in [\![1, \cancel{n}\ m]\!] \mid a_{ij} \neq 0\}$ der niedrigste Spaltenindex in Zeile $i \in [\![1, r]\!]$, in der ein Eintrag ungleich 0 steht, dann gilt die **Stufenbedingung** $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.



$j_1 = 3$
$j_2 = 4$
$j_3 = 7$

$* \in K \setminus \{0\}$
$? \in K$

Beispiel 15.19

Besetzungsmuster einiger Matrizen in Zeilenstufenform mit

$$\star \in K \setminus \{0\} \quad (\textbf{Pivot-Element}) \quad \text{und} \quad ? \in K.$$

$$\begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$j_1 = 3$
$j_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$

Beispiel 15.22

Pivot-Element $j_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{Typ III}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} (-3)$$

$$\overset{\text{Typ II}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} 2 \overset{\text{Typ II}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2$

$$ZR(A) = \langle \underbrace{(0,1,2,0), (0,0,3,-1)}_{\text{lin unabh.}} \rangle$$

$\operatorname{Rang}(A) = 2 = \#$ Pivot-Elemente

Rangfaktorisierung

Im Beispiel haben wir folgende elementare Zeilenumformungen gemacht:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{E_3 \\ \text{(Typ II)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{E_2 \\ \text{(Typ II)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{E_1 \\ \text{(Typ III)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C}.$$

Wenn es Matrizen E_3', E_2', E_1' gäbe mit der Eigenschaft $E_j' \, E_j = I_3$, so könnten wir die Gleichung umschreiben als

$$\begin{aligned} A &= \quad E_1' \, E_2' \, E_3' \qquad\qquad C \\ &=: \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cancel{\cdot} \\ \cdot & \cdot & \cancel{\cdot} \\ \cdot & \cdot & \cancel{\cdot} \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}}_{C}. \end{aligned}$$

Transposition von Matrizen

$A^T \quad A^t \quad {}^tA$

Definition 15.24

Zu $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ heißt $A^\mathsf{T} = (a_{ji}) \in K^{m \times n}$ die **transponierte Matrix**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rechenregeln für Transponierte

Lemma 15.26

$$
\begin{aligned}
(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} &= A \\
(A + B)^\mathsf{T} &= A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T} \\
(\alpha\, A)^\mathsf{T} &= \alpha\, A^\mathsf{T} \\
(A\, C)^\mathsf{T} &= C^\mathsf{T} A^\mathsf{T}
\end{aligned}
$$

Lemma 15.27

$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^\mathsf{T})$

Symmetrie und Antisymmetrie

Definition 15.28

1. $A \in K^{n \times n}$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^\mathsf{T}$ gilt.
2. $A \in K^{n \times n}$ heißt **antisymmetrisch**, wenn $A = -A^\mathsf{T}$ gilt.

Lemma 15.29

Für Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \dim(K^{n \times n}_{\text{sym}}) &= \frac{1}{2} n \, (n+1) \\ \dim(K^{n \times n}_{\text{skew}}) &= \frac{1}{2} n \, (n-1) \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad K^{n \times n} = K^{n \times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n \times n}_{\text{skew}}$$

Beweis. Hausaufgabe