Plenarübung LA I

(Inhalts)-Wochen 10/11

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	15	26.32%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	6	10.53%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	8	14.04%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	36	63.16%
Gesamt(Brutto)	**65**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	7	12.28%
Keine Antwort	14	24.56%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	36	63.16%
Gesamt(Brutto)	**57**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Wdh. Rangfaktorisierung und Zeilenstufentransformation

(2) Wdh. Transposition, Zerlegung und Invertierung von Matrizen

(3) Lösen linearer GS, mehrere rechte Seiten

(4) Beweis der Unterraumstruktur der LGS-Lösungsmenge

(5) Transformation von Lösungsmengen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Verständnis verbessern, Fragen/Themen addressieren

Arbeitsplan :)

(1) Wochenüberblick

(2) Wdh. und Bspl. Matrixmultiplikation und Rangfaktorisierung

(3) Erklärung zu Symmetrie/Antisymmetrie und Matrixsplit

(4) Weiterführende Erklärungen zum Matrixring und Inversen

(5) Matrixquiz

(6) Bspl. LGS mit mehreren Seiten aus einer Anwendung

(7) Erklärungen Beweis Satz 16.3, Dimension des Lösungsraums

(8) Erklärung und Folgerungen zu Transformationsresultaten

(9) LGS-Quiz

(10) Einführung Blockmatrixmultiplikation

Wochenüberblick

Die (bisherigen) drei Sichtweisen auf Matrixmultiplikation

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Wiederholung Rang/Rangfaktorisierung

Es sei $A \in K^{n \times m}$.

Die fundamentale Erkenntnis

$$0 \leqslant \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SRang}(A) \leqslant \min\{m, n\}.$$

Wir setzen $r := \mathrm{Rang}(A)$.

Ein Nebenresultat des Beweises

Es gibt $B \in K^{n \times \ell}$ und $C \in K^{\ell \times m}$ mit $\ell = r$, so dass $A = B\,C$, und keine solchen mit $\ell < r$.

Wie kann man solche bestimmen?

Eine Technik zur Bestimmung

Zeilen-/ Spaltentransformationen zu einer Stufenform.

$A =$

Beispiel zur Bestimmung einer Rangfaktorisierung/ZSF

$$\mathbb{R}^{4x3} \ni A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Transposition und Anti-(symmetrie)

Lemma 15.29

Für Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \dim(K^{n\times n}_{\mathrm{sym}}) &= \frac{1}{2} n\,(n+1) \\ \dim(K^{n\times n}_{\mathrm{skew}}) &= \frac{1}{2} n\,(n-1) \end{aligned} \quad \text{und} \quad K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\mathrm{skew}}$$

Was ist bei $\mathrm{char}(K) = 2$ besonders?

Ring quadratischer Matrizen

Lemma 15.30

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring mit dem Einselement I_n, genannt der **Matrixring** der $n \times n$-Matrizen. Für $n \geqslant 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ.

(1) Was ist $\mathrm{char}(K^{n\times n})$?

(2) Warum haben wir uns nicht Polynome über diesem Ring angeschaut?

Inverse einer Matrix

Definition 15.36

(1) $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft

$$A\,B = I \quad \text{und} \quad B\,A = I$$

B heißt die zu A **inverse Matrix**, kurz: $B = A^{-1}$.

(2) $\mathrm{GL}(n, K) := \left\{ A \in K^{n \times n} \,\middle|\, A \text{ ist invertierbar} \right\}$.

Hauptbesonderheit:

True/False – Matrixquiz

(1) Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix entspricht Ihrem Spaltenrang.

(2) Die invertierbaren Matrizen bilden mit der Matrixaddition und Multiplikation einen Unterring.

(3) Strikte Dreiecksmatrizen sind nicht invertierbar.

(4) Keine invertierbare Matrix ist nilpotent.

(5) $A \mapsto A^{-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus auf $\mathrm{GL}(n, K)$.

(6) $A \mapsto A^{-T}$ ist ein Gruppenhomomorphismus auf $\mathrm{GL}(n, K)$.

(7) Die Rangfaktorisierung einer Matrix ist eindeutig.

Lineare Gleichungssysteme in einer Anwendung

Flussproblem

Gegeben seien Knoten v_1,v_2,v_3. Aus v_1 fließen 3 Einheiten aus (Quelle), in v_3 fließen 3 Einheiten ein (Senke), v_2 ist ein Durchgangsknoten. Alle Knoten sind verbunden. Welche Flüsse sind möglich? Was sind die Lösungen, wenn v_2 und v_3 Rollen tauschen?

Dimension des Lösungsraums

Satz 16.3

(1) $\mathcal{L}(A, 0)$ ist ein Unterraum von K^m der Dimension $m - \operatorname{Rang}(A)$.

Kommentar zum Beweis:

Transformationsresultate

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{n\times m}$, $b \in K^n$ und $M \in K^{k\times n}$, $N \in K^{m\times k}$. In den Hausaufgaben haben wir gezeigt, dass

$\mathcal{L}(MA, Mb) =$ und $\mathcal{L}(AN, b) =$ ist.

Wie können wir damit Lösungen bei Spalten-/Zeilenvertauschungen zu bestimmen?

True/False – LGS Quiz

(1) Lösungsmengen von reellen linearen Gleichungssystemen sind unbeschränkt.

(2) Für beliebige rechte Seiten im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix sind die Lösungsmengen eines LGS gleichmächtig.

(3) Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen LGS entspricht dem Rang der Matrix.

(4) In endlichen Körpern sind lineare Gleichungssysteme nur eindeutig oder garnicht lösbar.

(5) Es gibt ein lineares Gleichungssystem mit genau 2 Lösungen.

Blockmatrizen

Definition

Eine Partition $\mathcal{I} = (I_i)_{i=1,\dots,q}$ von $I := [\![1, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\min I_{i+1} = \max I_i + 1$ heißt eine **Blockpartition** von I in q Blöcke. Für $n, m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ und Blockpartitionen von $[\![1, n]\!]$ bzw. $[\![1, m]\!]$ heißen $A_{i,j} \colon I_i \times J_j \to K$ von A **Untermatrizen**.

Beispiel:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Blockmatrixmultiplikation

Wenn die inneren Blockdimensionen zweier Blockmatrizen übereinstimmen, dann kann man blockweise multiplizieren.

Beispiel: Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wie können geschickt Blöcke in den Matrizen gewählt werden, um AB einfacher zu berechnen?

$$AB = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}$$