Plenarübung LA I

(Inhalts)-Wochen 10/11

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten	15	26.32%
Erklärungen zu Skriptbeispielen	6	10.53%
Lösungen der Hausaufgaben	8	14.04%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	36	63.16%
Gesamt(Brutto)	**65**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort	7	12.28%
Keine Antwort	14	24.56%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	36	63.16%
Gesamt(Brutto)	**57**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Wdh. Rangfaktorisierung und Zeilenstufentransformation

(2) Wdh. Transposition, Zerlegung und Invertierung von Matrizen

(3) Lösen linearer GS, mehrere rechte Seiten

(4) Beweis der Unterraumstruktur der LGS-Lösungsmenge

(5) Transformation von Lösungsmengen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Verständnis verbessern, Fragen/Themen addressieren

Arbeitsplan :)

(1) Wochenüberblick

(2) Wdh. und Bspl. Matrixmultiplikation und Rangfaktorisierung

(3) Erklärung zu Symmetrie/Antisymmetrie und Matrixsplit

(4) Weiterführende Erklärungen zum Matrixring und Inversen

(5) Matrixquiz

(6) Bspl. LGS mit mehreren Seiten aus einer Anwendung

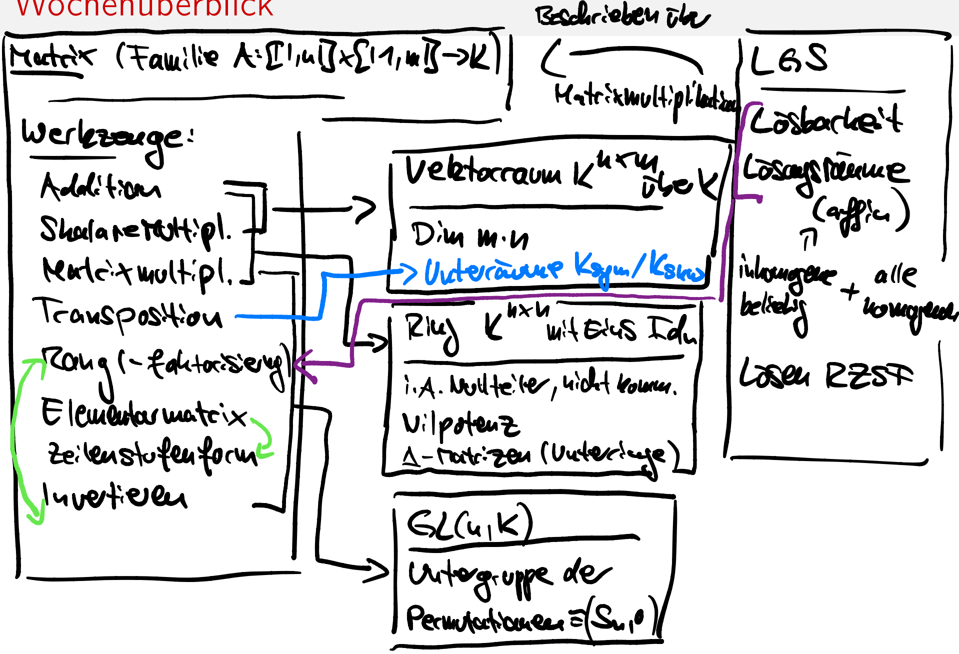
(7) Erklärungen Beweis Satz 16.3, Dimension des Lösungsraums

(8) Erklärung und Folgerungen zu Transformationsresultaten

(9) LGS-Quiz

(10) Einführung Blockmatrixmultiplikation

Wochenüberblick



Matrix (Familie $A: [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \to K$)

Werkzeuge:

- Addition
- Skalarmultipl.
- Matrixmultipl.
- Transposition
- Rang(-faktorisierung)
- Elementarmatrix
- Zeilenstufenform
- Invertieren

Vektorraum $K^{n\times m}$ über K

Dim $m \cdot n$

Unterräume K_{sym} / K_{skw}

Ring $K^{n\times n}$ mit Eins Id_n

i.A. Nullteiler, nicht komm.

Nilpotenz

Δ-Matrizen (Unterringe)

$GL(n,K)$

Untergruppe der Permutationen $\cong (S_n, \circ)$

Beschrieben über Matrixmultiplikation

LGS

Lösbarkeit

Lösungsräume (affin)

↗

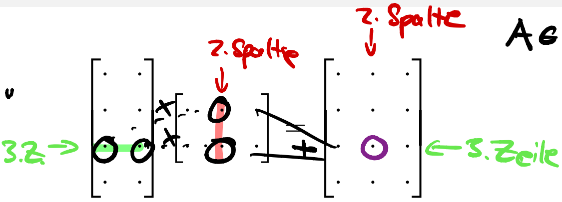
inhomogene beliebig + alle homogenen

Lösen RZSF

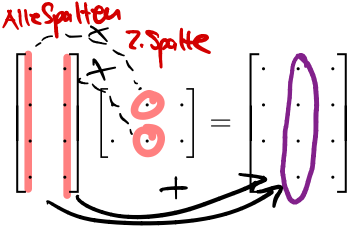
Die (bisherigen) drei Sichtweisen auf Matrixmultiplikation

$A \in K^{n \times m}$

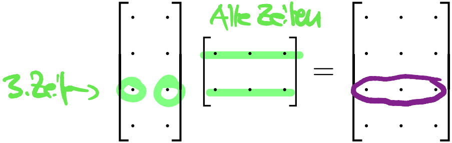
"Komponentenweise"



"Spaltenweise"



"Zeilenweise"



Alle äquivalent.

Wiederholung Rang/Rangfaktorisierung

Es sei $A \in K^{n\times m}$.

Dim Z-Raum Dim S-Raum

Die fundamentale Erkenntnis

$$0 \leqslant \overset{\text{Dim Z-Raum}}{\mathrm{ZRang}(A)} \underline{=} \overset{\text{Dim S-Raum}}{\mathrm{SRang}(A)} \leqslant \min\{m, n\}.$$

Wir setzen $r := \mathrm{Rang}(A)$.

Ein Nebenresultat des Beweises

Es gibt $B \in K^{n\times \ell}$ und $C \in K^{\ell\times m}$ mit $\ell = r$, so dass $\underline{A = B\,C}$, und <u>keine solchen mit $\ell < r$.</u>

Wie kann man solche bestimmen?

$$n\overset{m}{\left[\quad A \quad\right]} = n\underset{r}{\left[\, B \,\right]} \cdot r\underset{m}{\left[\quad C \quad\right]}$$

Eine Technik zur Bestimmung

Zeilen-/ Spaltentransformationen zu einer Stufenform.

$$A = \underline{E_1'}\,\underline{E_1 A} = \underline{E_1' E_2'}\,\underline{E_2 E_1 A} = \ldots = \overset{\in GL(n,K)}{B} \cdot \overset{\text{ZSF mit 0-Zeilen}}{C}$$

∈ GL(n,K)

ZSF mit 0-Zeilen

& Nullzeilen streichen

Beispiel zur Bestimmung einer Rangfaktorisierung/ZSF

$$\mathbb{R}^{4x3} \ni A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

$$B \rightarrow = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \leftarrow C$$

$$\tilde{B} \in GL(4,\mathbb{R}) \longrightarrow \qquad\qquad \leftarrow \tilde{C}$$

Transposition und Anti-(symmetrie)

Symmetrie: $A^T = A$

Antisymmetrie: $A^T = -A$

Lemma 15.29

Für Körper mit char$(K) \neq 2$ gilt:

Basis $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}n(n-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{n}$

$$\dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$

$$\dim(K^{n\times n}_{\text{skew}}) = \frac{1}{2} n\,(n-1)$$

und $\quad K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{skew}}$

Basis: $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}n(n-1)}$

Erzeugendeneigenschaft:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\in K_{sym}^{n\times n}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\in K_{skw}}$$

Vollschnitt: $A \in K_{sym}^{n\times n} \cap K_{skw}^{n\times n}$

$A = A^T = -A \Rightarrow$ Jedes Element von A ist selbstinvers

$\Rightarrow A = 0$

„ord(1_K)"

Was ist bei char$(K) = 2$ besonders?

Jedes $k \in K$ ist selbstinvers:

$$k + k = k(\underbrace{1_K + 1_K}_{0}) = 0$$

Sind alle Matrizen dann symmetrisch? Nein, siehe

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$$

Es gibt viele endliche und unendliche Körper mit Charakteristik 2!

Ring quadratischer Matrizen

Lemma 15.30

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring mit dem Einselement I_n, genannt der **Matrixring** der $n \times n$-Matrizen. Für $n \geqslant 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ.

(1) Was ist $\mathrm{char}(K^{n\times n})$? $= \mathrm{ord}\left(\begin{bmatrix} 1_K & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_K \end{bmatrix}\right) = \mathrm{char}(K)$, denn

$$\mathrm{char}(K)\begin{bmatrix} 1_K & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_K \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{char}(K)1_K & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{char}(K)1_K \end{bmatrix} = 0$$

(2) Warum haben wir uns nicht Polynome über diesem Ring angeschaut? Nicht kommutativ! ⇒ Polynome nicht von unsere Theorie abgedeckt.

Polynome sind für Matrizen sehr wichtig ⇒ LA2

z.B. kann man sich fragen: Gibt es für jedes $A \in K^{n\times n}$ ein Polynom $p \in K[t]$ $p = \underset{\in K}{a_0} + a_1 t + \dots + a_n t^n$ mit $p(A) = 0$

Andere Einsetzungsabbildung

Ja, denn $A^0, \dots, A^{(n^2)}$ sind linear abhängig

$\Rightarrow \exists p \quad a_0 A^0 + a_1 A^1 + \dots + a_{n^2} A^{(n^2)} = 0$

A invertierbar $\Rightarrow A^{-1} = \tilde{p}(A)$

Inverse einer Matrix

Definition 15.36

(1) $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft

$$A\,B = I \quad \text{und} \quad B\,A = I$$

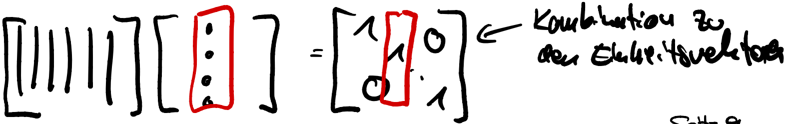
B heißt die zu A **inverse Matrix**, kurz: $B = A^{-1}$.

(2) $\mathrm{GL}(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$.

Hauptbesonderheit: $AB = I \Leftrightarrow BA = I$ für alle $A, B \in K^{n \times n}$!

I.A. Ansonsten gilt das nicht, siehe $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ linksinvers $\overset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ rechtsinvers

Was heißt Invertierbarkeit im Sinne der Matrixmult.?



Seite 9 ↓

$\Rightarrow$ Manche Strukturen übertragen sich, manche nicht

$(\mathbb{N}, \setminus)$ – bilden Untergruppen, Außerdem Polynomstrukt

True/False – Matrixquiz

(1) Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix entspricht Ihrem Spaltenrang.

Ja, denn das ihr Zeilenrang, und der stimmt SRang(A) überein.

(2) Die invertierbaren Matrizen bilden mit der Matrixaddition und ~ Multiplikation einen Unterring.

Falsch, 0 ist nicht invertierbar

(3) Strikte Dreiecksmatrizen sind nicht invertierbar.

Wahr, die haben Nullzeilen /-spalten

(4) Keine invertierbare Matrix ist nilpotent.

Wahr, jede Potenz einer Matrix ist invertierbar, also nie Null

(5) $A \mapsto A^{-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus auf $\mathrm{GL}(n, K)$.

Falsch $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \overset{\text{i.A.}}{\neq} A^{-1}\cdot B^{-1}$

(6) $A \mapsto A^{-T}$ ist ein Gruppenhomomorphismus auf $\mathrm{GL}(n, K)$.

Wahr $(AB)^{-T} = ((AB)^{-1})^{T} = (B^{-1}A^{-1})^{T} = (A^{-1})^{T}(B^{-1})^{T} = A^{-T}B^{-T}$

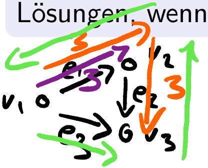
(7) Die Rangfaktorisierung einer Matrix ist eindeutig.

Falsch, z.B. Skalieren ist möglich $\alpha B \cdot \frac{1}{\alpha} C = A \ \forall \alpha \in K\setminus\{0\}$

Lineare Gleichungssysteme in einer Anwendung

Flussproblem

Gegeben seien Knoten v_1, v_2, v_3. Aus v_1 fließen 3 Einheiten aus (Quelle), in v_3 fließen 3 Einheiten ein (Senke), v_2 ist ein Durchgangsknoten. Alle Knoten sind verbunden. Welche Flüsse sind möglich? Was sind die Lösungen, wenn v_2 und v_3 Rollen tauschen?



$$-e_1 - e_3 = -3,\ -3$$
$$e_1 - e_2 = 0,\ 3$$
$$e_2 + e_3 = 3,\ 0$$

$$\text{LGS} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & -1 & 0 & -1 \\ v_2 & 1 & -1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 \end{array}}_{\text{Inzidenzmatrix}} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & \boxed{0} & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0}_{\text{abh.}} & & \underset{\uparrow \text{ unabh.}}{0} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösungsraumdim von Matrix vorgegeben

3-Rang = 1 dim

Inhomogene Lsg:

System 1: $e_3 = 0 \Rightarrow e_2 = 3,\ e_1 = 3$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

System 2: $e_3 = 0 \Rightarrow e_2 = 0,\ e_1 = 3$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Homogen:

$e_1 = -e_3$

$e_2 = -e_3$ $\rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{(\lambda, 0)$

Kreisfluss

Dimension des Lösungsraums

Satz 16.3

(1) $\mathcal{L}(A, 0)$ ist ein Unterraum von K^m der Dimension $m - \operatorname{Rang}(A)$.

Kommentar zum Beweis: Das Ablesen der homogenen Lösung muss formalisiert werden.

Im Beweis

$$L(A,0) = L(C,0) \text{ (Wechsel auf ZSF)}$$

$$x = \Pi_A^{+} \underbrace{x_A}_{\Pi_A x} + \Pi_I^T \underbrace{x_I}_{\Pi_I x}$$

$$\Rightarrow Cx = C\Pi_A^T x_A + C\Pi_I^T x_I \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_A = -\underbrace{(C\Pi_A^T)}_{\text{immer invertierbare Dreiecksmatrix}}{}^{-1} C\Pi_I x_I$$

$m - r$ freie Wahlen $\hat{=}$ Dimension

Fluss-Bsp

$$L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 0\right) = L\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, 0\right)$$

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Pi_A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\Pi_A x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\Pi_I^T} \underbrace{x_3}_{\Pi_I x}$$

$$Cx = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 \leftarrow 1 \text{ freie Wahl}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3$$

Transformationsresultate

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{n\times m}$, $b \in K^n$ und $M \in K^{k\times n}$, $N \in K^{m\times k}$. In den Hausaufgaben haben wir gezeigt, dass

$\mathcal{L}(MA, Mb) = \mathcal{L}(A,b + \mathcal{L}(M,0))$ und $\mathcal{L}(AN, b) = \mathcal{L}(N, \mathcal{L}(A,b))$ ist.

Wie können wir damit Lösungen bei Spalten-/Zeilenvertauschungen zu bestimmen?

$$\boxed{M = N = T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 \cdots 1 & \\ & & & 1 \cdots 0 & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}}$$

Zeilentausch:

M selbstinvers ⇒ M invertierbar

⇒ $\mathcal{L}(M,0) = \{0\}$

$$\mathcal{L}(MA, Mb) = \mathcal{L}(A,b)$$

⇒ Zeilentausch ändert nichts am Lösungsraum, keine invertierbare Matrix M tut das. $M = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(..) = \mathbb{R}^m$

Spaltentausch:

$$\Rightarrow \mathcal{L}(AN,b) = \mathcal{L}(T_{ij}, \mathcal{L}(A,b))$$
$$= T_{ij}^{-1}\mathcal{L}(A,b)$$
$$= T_{ij}\,\mathcal{L}(A,b)$$

⇒ Spaltentausch in der Matrix führt zu Zeilentausch in den Lösungen

True/False – LGS Quiz

(1) Lösungsmengen von reellen linearen Gleichungssystemen sind unbeschränkt.

Falsch, es können die leere Menge oder Punktmengen vorkommen.

(2) Für beliebige rechte Seiten im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix sind die Lösungsmengen eines LGS gleichmächtig.

Wahr, denn System ist dann lösbar und Mächtigkeit ist immer die von $\mathcal{L}(A\,0)$

(3) Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen LGS entspricht dem Rang der Matrix.

Falsch, die Dimension ist $m - \text{Rang}(A)$ und damit i.A. $\neq \text{Rang}(A)$

(4) In endlichen Körpern sind lineare Gleichungssysteme nur eindeutig oder garnicht lösbar.

Falsch, siehe Skript

(5) Es gibt ein lineares Gleichungssystem mit genau 2 Lösungen.

Ja, z.B. $0 \cdot x = 0$ in $\mathbb{Z}_2$. Es gibt die Möglichkeiten $0, 1, \underbrace{\# K}_{\text{1-Dimensionaler Raum}}$

Blockmatrizen

Definition

Eine Partition $\mathcal{I} = (I_i)_{i=1,\dots,q}$ von $I := [\![1, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\min I_{i+1} = \max I_i + 1$ heißt eine **Blockpartition** von I in q Blöcke. Für $n, m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $A \in K^{n\times m}$ und Blockpartitionen von $[\![1, n]\!]$ bzw. $[\![1, m]\!]$ heißen $A_{i,j} : I_i \times J_j \to K$ von A **Untermatrizen**.

Beispiel:

A_{11} $\quad A_{13} \in \mathbb{R}^{2\times3}$

$$A := \begin{array}{|cc|c|ccc|l}
\multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 5}}^{2}} & \multicolumn{1}{c}{\overbrace{\hphantom{1}}^{1}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 6\quad 0}}^{3}} & \\
1 & 5 & 1 & 1 & 6 & 0 & \big\} 2 \\
1 & 7 & 2 & 2 & 2 & 1 & \\
\hline
3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 & \Big\} 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 3 &
\end{array}$$

A_{21} $\quad A_{22}$ $\quad A_{23} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

Das kann bei der Matrixmultiplikation genutzt werden.

Blockmatrixmultiplikation

Wenn die inneren Blockdimensionen zweier Blockmatrizen übereinstimmen, dann kann man blockweise multiplizieren.

Beispiel: Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & 2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad B := \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ \\ 1 \\ 2 \\ \\ \end{array} .$$

Wie können geschickt Blöcke in den Matrizen gewählt werden, um AB einfacher zu berechnen?

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11}B_{11}+0+0 & A_{11}B_{12}+0 & 0+A_{13}B_{33} \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 6 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 18 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 6 & 6 & 1 \end{array}\right]$$