Lineare Algebra I

Woche 09

12.12.2023 und 14.12.2023 und 18.12.2023

lineare Unabhängigkeit

Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$n \in \mathbb{N}, \quad v_1, \ldots, v_n \in E, \quad v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, v_\ell = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \ldots, n$$

Ansonsten heißt die Menge **linear abhängig**.

lineare Unabhängigkeit

Beispiel

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

lineare Unabhängigkeit

Beispiel

3. Die Menge der Monome $E = \{1, t, t^2, \ldots\}$ im Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist

4. Es sei X eine Menge und $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Die Menge der charakteristischen Funktionen $\{e_y \mid y \in X\}$ ist

lineare Abhängigkeit bedeutet Kombinierbarkeit

Lemma

Es sei V ein Vektorraum. Dann sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.

Beweis. Hausaufgabe

lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz

Lemma

Es sei V ein Vektorraum. Dann sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$, sodass gilt:

$$\langle E \setminus \{v\} \rangle = \langle E \rangle.$$

Beweis.

lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Linearkomb.

Lemma

Es sei V ein Vektorraum. Dann sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear unabhängige Menge.
2. Jeder Vektor $v \in \langle E \rangle$ lässt sich in eindeutiger Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Vektoren der Menge E linearkombinieren.

lineare (Un)abhängigkeit von Teil- und Obermengen

Es sei V ein Vektorraum.

Lemma

1. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge in V ist ebenfalls linear unabhängig.
2. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge in V ist ebenfalls linear abhängig.

Beweis.

Basis

Definition

Es sei V ein Vektorraum.

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt eine **Basis** von V, wenn

- B linear unabhängig ist und
- $\langle B \rangle = V$ gilt.

Basis

Beispiel

1. Im Standardvektorraum K^n über einem Körper K

$$\{e_1, \ldots, e_n\} \text{ mit } e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis, genannt die **kanonische Basis** von K^n.

Basis

Beispiel

2. Die Menge $E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist

3. Es sei $(K[t], +, \cdot)$ der Polynomraum über einem Körper $(K, +, \cdot)$.

   Die Monome $E = \{1, t, t^2, \ldots\}$

   Die Monome $E = \{1, t, \ldots, t^n\}$

Basis

Beispiel

4. $\emptyset$ ist die einzige Basis des Nullraumes $\{0\}$ über jedem Körper K.

5. $\{1, i\}$ ist eine Basis von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

6. Für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist keine Basis bekannt.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis.

Basisergänzungssatz

Satz

Es sei V ein Vektorraum.

Es sei

- A eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus V
- E ein Erzeugendensystem von V mit der Eigenschaft $A \subseteq E$.

Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq E$.

Der Beweis verwendet das Auswahlaxiom in Form des Lemmas von Zorn.

Basisergänzungssatz

Folgerung

Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

Folgerung

Aus jedem Erzeugendensystem E eines Vektorraumes V lässt sich eine Basis auswählen.

Folgerung

Jede linear unabhängige Menge A eines Vektorraumes V kann zu einer Basis erweitert werden.

Dimension eines Vektorraumes

Definition

Es sei V ein Vektorraum.

1. Wenn V eine Basis B der endlichen Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt, so sagen wir, V habe die **endliche Dimension** n.

2. Wenn V keine Basis endlicher Kardinalität besitzt, so sagen wir, V habe **unendliche Dimension**, in Symbolen: $\dim V = \infty$.

Austauschlemma

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Die endliche Menge $B = \{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V mit $n \in \mathbb{N}$. Mit

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_n v_n$$

ist auch

$$B_0 \coloneqq \{v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$$

eine Basis von V.

Austauschsatz von Steinitz

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V mit $\#B = n \in \mathbb{N}_0$.

Ist $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ eine linear unabhängige Menge in V mit $\#A = m \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

1. $m \leqslant n$.
2. Es gibt eine $(n - m)$-elementige Teilmenge D von B, sodass $B_0 := A \cup D$ ebenfalls eine Basis von V ist. Es gilt $\#B_0 = n$.

Dimension ist wohldefiniert

Folgerung

Es sei V ein Vektorraum.

1. Wenn V endlich erzeugt ist, dann ist jede Basis von V endlich, und alle Basen haben dieselbe Mächtigkeit.
2. Wenn V nicht endlich erzeugt ist, dann ist jede Basis von V unendlich.

Beweis.

Dimension eines Vektorraumes

Beispiel

1. Der „Standardvektorraum der Dimension n“ K^n über einem Körper K hat tatsächlich die Dimension $n \in \mathbb{N}$.

2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} =$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} =$

3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$

4. $\dim\{0\} =$

Dimension eines Vektorraumes

Beispiel

5. Der Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ hat

6. Der Unterraum der Polynome $(K_n[t], +, \cdot)$ vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$

Dimension, Unterraum, lineare Unabhängigkeit

Folgerung

Es sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ist $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge, dann gilt $\#A \leqslant n$.
2. $A \subseteq V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn A linear unabhängig ist und $\#A = n$ gilt.
3. Für jeden Unterraum U von V gilt: $0 \leqslant \dim U \leqslant \dim V$.
4. Für jeden Unterraum U von V gilt $U = V$ genau dann, wenn $\dim U = \dim V$ ist.

lineare Hülle der Vereinigung zweier Unterräume

Es sei V ein Vektorraum und U, W Unterräume.

$U \cup W$ ist im Allgemeinen kein Unterraum.

Lemma

$$\langle U \cup W \rangle = U + W$$

Beweis.

Halbordnung auf der Menge aller Unterräume

Es sei V ein Vektorraum und

$$M := \left\{ U \subseteq V \;\middle|\; U \text{ ist Unterraum von } V \right\}.$$

Dimension der Summe zweier Unterräume

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei endlich-dimensionale Unterräume von V. Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Summe von zwei Unterräumen

Beispiel

1. $$U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$$

2. $$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Summe von zwei Unterräumen

Beispiel

3.
$$U = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle t, t^3, t^4 \rangle$$

direkte Summe von zwei Unterräumen

Definition

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Die Summe $U + W$ heißt **direkt**, wenn $U \cap W = \{0\}$ gilt.

Beispiel

1. $$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. $$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Charakterisierung direkter Summen von zwei Unterräumen

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Dann sind äquivalent:

1. $V = U \oplus W$.
2. Für alle $v \in V$ existieren eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

3. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis.

Charakterisierung direkter Summen von zwei Unterräumen

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Dann sind äquivalent:

1. $V = U \oplus W$.
2. Für alle $v \in V$ existieren eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

3. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis.

Charakterisierung direkter Summen von zwei Unterräumen

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Dann sind äquivalent:

1. $V = U \oplus W$.
2. Für alle $v \in V$ existieren eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

3. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis.

direkte Summe von zwei Unterräumen, Basispartionierung

Satz

Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt:

1. Ist B eine Basis von V und $\{B_1, B_2\}$ eine Partition von B, dann gilt $V = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$.

2. Sind U_1, U_2 Unterräume von V mit Basen B_1, B_2 und gilt $V = U_1 \oplus U_2$, so ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V.

komplementäre Unterräume

Definition

Es seien V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V.

1. Ein Unterraum W von V heißt ein **zu U komplementärer Unterraum** in V, wenn $V = U \oplus W$ gilt.
2. Die Dimension $\dim(W)$ eines zu U komplementären Unterraumes W heißt die **Kodimension** von U in V.

Wenn V endlich-dimensional ist, gilt

Existenz komplementärer Unterräume

Folgerung

Es seien V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V.

Dann existiert ein zu U komplementärer Unterraum W in V.

Beweis.

Beispiel

1. Jeder eindimensionale Unterraum W, der nicht identisch mit $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ist, ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^2$.

2. Jeder zweidimensionale Unterraum W, der den Unterraum $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ nicht enthält, ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^3$.

Beispiel

3. Die komplementären Unterräume des Unterraumes $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$ der konvergenten Folgen im Vektorraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ haben keine einfache Darstellung.

Summe einer Familie von Unterräumen

Definition

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Der Unterraum

$$\sum_{i \in I} U_i := \Big\langle \bigcup_{i \in I} U_i \Big\rangle$$

heißt die **Summe der Familie von Unterräumen** $(U_i)_{i \in I}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} U_i &= \Big\{ \sum_{i \in I_0} U_i \;\Big|\; I_0 \subseteq I \text{ ist eine endliche Teilfamilie} \Big\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in I_0} u_i \;\middle|\; \begin{array}{l} I_0 \subseteq I \text{ ist eine endliche Teilfamilie} \\ \text{und } u_i \in U_i \text{ für alle } i \in I_0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

direkte Summe einer Familie von Unterräumen

Definition

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Die Summe $\sum_{i \in I} U_i \coloneqq \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ heißt **direkt**, wenn gilt:

$$U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\} \quad \text{für alle } j \in I.$$

Wir schreiben dann $\bigoplus_{i \in I} U_i$.

Summe einer Familie von Unterräumen

Beispiel

1. Für den Standardvektorraum K^n über einem Körper K mit den Basisvektoren e_i für $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle e_i \rangle$$

2. Für den Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper K mit der Basis $B = \{1, t, t^2, \ldots\}$ gilt

$$K[t] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \langle t^i \rangle$$

Charakterisierung direkter Summen von Unterräumen

Satz

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

1. $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.
2. Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf die Summation von Nullvektoren) eindeutig.

Beweis. Hausaufgabe

direkte Summe von Unterräumen, Basispartionierung

Satz

Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt:

1. Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

2. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V.

Beweis. Hausaufgabe