Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 09

Link zu diesen Folien

Evaluationsergebnisse – PÜ (rot), VL (grün), optimal (blau)

2. Bewertung der Lehrveranstaltung

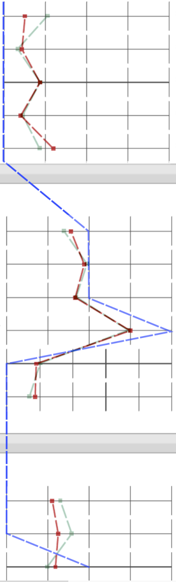
2.1)	Die Lernziele wurden zu Beginn klar definiert.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=92	mw=1,5	md=1,0	s=0,7
2.2)	Die Lehrveranstaltung ist klar strukturiert.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=94	mw=1,4	md=1,0	s=0,7
2.3)	Der Lehrstoff wird in verständlicher Weise vermittelt.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=94	mw=1,9	md=2,0	s=1,0
2.4)	Es wird auf Fragen und Belange der Studierenden eingegangen.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=93	mw=1,4	md=1,0	s=0,6
2.5)	Mein Lernzuwachs ist hoch.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=92	mw=2,2	md=2,0	s=1,0

5. Vorlesung

5.1)	Das Anforderungsniveau der Vorlesung empfinde ich ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=90	mw=2,6	md=3,0	s=0,6
5.2)	Das vorausgesetzte Vorwissen für die Vorlesung ist ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=89	mw=2,9	md=3,0	s=0,4
5.3)	Das Tempo der Vorlesung empfinde ich ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=94	mw=2,7	md=3,0	s=0,7
5.4)	Ich würde Vorlesungen bei diesem*dieser Lehrenden weiterempfehlen.	stimme gar nicht zu	stimme voll zu	n=94	mw=4,0	md=4,5	s=1,2
5.5)	Ich bewerte die Vorlesung mit folgender Schulnote:	1	6	n=93	mw=1,9	md=2,0	s=0,9
5.6)	Ich bewerte das vorlesungsbegleitende Material mit folgender Schulnote:	1	6	n=92	mw=1,9	md=2,0	s=0,8

6. Übungsbetrieb

6.1)	Die Aufgaben sind gut auf die Vorlesung abgestimmt.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=77	mw=2,1	md=2,0	s=1,1
6.2)	Die Aufgaben sind fehlerfrei und unmissverständlich gestellt.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=77	mw=2,2	md=2,0	s=1,0
6.3)	Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben empfinde ich als ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=78	mw=2,2	md=2,0	s=0,8



Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	6	16.22%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	2	5.41%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	31	83.78%
Gesamt(Brutto)	**39**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	4	10.81%
Keine Antwort	2	5.41%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	31	83.78%
Gesamt(Brutto)	**37**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Basisergänzungssatz und Hausaufgabe 9.4

(2) (Direkte) Summe von (Familie von) Unterräumen

(3) Basispartitionierung

(4) Grundsätzlich Familien- statt Mengenaussagen

(5) Vorgehen beim Bestimmen von Basen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Festigen des Verständnisses von linearer Unabhängigkeit, Basiseigenschaft, (direkten) Summen

Arbeitsplan

(1) Wiederholung grundlegender Definitionen und Wochenüberblick

(2) Details zu Linearer Unabhängigkeit (mit Familien)

(3) True/False Quiz zu linearer Unabhängigkeit/Basen

(4) Kurze Diskussion von $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$

(5) Details zur Summe von Unterräumen

(6) ~~True~~/False Quiz zu Summen von Unterräumen

(7) Untersuchung von Struktur der Unterraumsumme

Kurzwiederholung wichtiger Begriffe

(1) **Vektorraum**: Abelsche Gruppe $(V, +)$ mit skalarer Multiplikation über Körper.

(2) **Unterraum**: Teilmenge U eines Vektorraums, die wieder Vektorraum mit den Verknüpfungen bildet.

(3) **Lineare Unabhängigkeit**: $0 \in V$ kann nur trivial paarweise verschieden linearkombiniert werden.

(4) **Basis**: Linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums

(5) **Summe von Unterräumen**: Wird elementweise gebildet, stimmt mit linearer Hülle der Vereinigung überein.

(6) **Direkte** Summe von Unterräumen: Summe von Unterräumen mit Trivialschnitt.

(7) **V-komplementärer Unterraum zu U**: Unterraum W, so dass $U \oplus W = V$.

Wochenüberblick

Lineare Unabhängigkeit I (Mengen)

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$n \in \mathbb{N}, \quad v_1, \dots, v_n \in E, \quad v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell v_\ell = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \dots, n$$

Lineare Unabhängigkeit II (Familien)

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$n \in \mathbb{N}, \quad i_1, \ldots, i_n \in I, \quad i_j \neq i_k \text{ für } j \neq k \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, v_{i_\ell} = 0$$

$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0$ für alle $\ell = 1, \ldots, n$.

Wie definiert man also lineare Unabhängigkeit für Mengen/Familien über die Definition von Familien/Mengen?

Mengendefinition über Familien

Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

Familiendefinition über Mengen

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

True/False – Lineare Unabhängigkeit und Basen

Es seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, B eine Basis von V, $E \subseteq F \subseteq V$.
Welche der folgenden Aussagen sind (wann) wahr?

(1) E lin. unabh. $\Rightarrow \langle E \rangle$ lin. unabh.

(2) E lin. unabh. $\Rightarrow E \subseteq B$

(3) E endlich $\Rightarrow \dim\langle E \rangle = \#E$

(4) $B \neq \emptyset$

(5) $E \subsetneq B \Rightarrow E$ ist keine Basis von V

(6) $V \setminus B$ ist lin. abh.

(7) $V \setminus B$ erzeugt V

(8) Jeder Vektorraum besitzt eine lin. unabh. Teilmenge

Dimension von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$

Satz

Es ist $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.

Diskussion:

(Direkte) Summen von Unterräumen

Lemma

Es sei V ein Vektorraum und U, W Unterräume. Dann gilt

$$\langle U \cup W \rangle_{\oplus,\odot} = U + W$$

Warum sehen wir so ein Resultat erst jetzt? Braucht das wirklich Vektorraumstruktur?

Gilt Folgendes?

Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und U, W mit $\star$ Untergruppen. Dann ist

$$\langle U \cup W \rangle_{\star} = U \star W$$

Summen von Familien von Unterräumen

Wir setzen $\sum_{i\in I} U_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} U_i \right\rangle$. Wenn $U_j \cap \sum_{i\in I\setminus\{j\}} U_i = \{0\}$ für alle $j \in I$ gilt, dann schreiben wir die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} U_i$.

Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit den komponentenweisen Verknüpfungen

Welche Eigenschaften hat die Summe von $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \right\rangle_{x\in\mathbb{R}}$?

Sei $V = \mathbb{R}^X$ mit den punktweisen Verknüpfungen

Welche Eigenschaften hat die Summe von $\langle e_x \rangle_{x\in X}$?

Basispartitionierung

Geben Sie zu den unten stehenden Beispielen jeweils eine Basispartitionierung mit den entsprechenden komplementären Unterräumen an.

$V = \mathbb{R}^n$ mit $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$V = (K[t], +, \cdot)$ mit $B = \{1, t, t^2, \dots\}$

~~True~~/False – Summen von Vektorräumen

Es seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, sowie U und $W, \widetilde{W}$ Unterräume von V. Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(1) $U \oplus W = V \Rightarrow V \subseteq U \cup W$.

(2) U und $V \setminus U$ sind V-komplementäre Unterräume.

(3) $U + W = V = U + \widetilde{W} \Rightarrow W \cap \widetilde{W} \neq \{0\}$.

(4) $U, W \subsetneq V$ V-komplementär $\Rightarrow$ Es existiert ein zu U und W komplementärer UR.

(5) Existiert zu U nur ein einziger komplementärer Unterraum, dann ist $U \in \{\emptyset, V\}$

Struktur der Unterraumsumme

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper und

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq V \,|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } V\}$$

die Menge der Unterräume von V mit der üblichen Vektorraumsumme

$$+ \colon \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \qquad U + W := \{u + w \,|\, u \in U \wedge w \in W\}.$$

Welche der folgenden algebraischen Strukturen bildet $(\mathcal{U}, +)$?

(1) Halbgruppe

(2) Monoid

(3) Gruppe

Hausaufgabe 9.4

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Dann gilt:

(1) Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i\in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i\in I} \langle B_i \rangle$.

(2) Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i\in I} B_i$ eine Basis von V.

Beweis.