Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 09

Link zu diesen Folien

Evaluationsergebnisse – PÜ (rot), VL (grün), optimal (blau)

2. Bewertung der Lehrveranstaltung

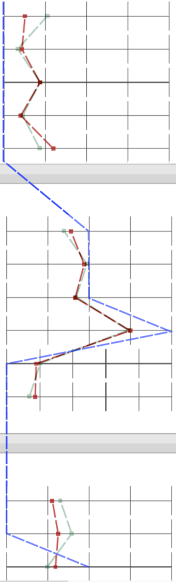
2.1) Die Lernziele wurden zu Beginn klar definiert.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=92	mw=1,5	md=1,0	s=0,7
2.2) Die Lehrveranstaltung ist klar strukturiert.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=94	mw=1,4	md=1,0	s=0,7
2.3) Der Lehrstoff wird in verständlicher Weise vermittelt.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=94	mw=1,9	md=2,0	s=1,0
2.4) Es wird auf Fragen und Belange der Studierenden eingegangen.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=93	mw=1,4	md=1,0	s=0,6
2.5) Mein Lernzuwachs ist hoch.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=92	mw=2,2	md=2,0	s=1,0

5. Vorlesung

5.1) Das Anforderungsniveau der Vorlesung empfinde ich ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=90	mw=2,6	md=3,0	s=0,6
5.2) Das vorausgesetzte Vorwissen für die Vorlesung ist ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=89	mw=2,9	md=3,0	s=0,4
5.3) Das Tempo der Vorlesung empfinde ich ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=94	mw=2,7	md=3,0	s=0,7
5.4) Ich würde Vorlesungen bei diesem*dieser Lehrenden weiterempfehlen.	stimme gar nicht zu	stimme voll zu	n=94	mw=4,0	md=4,5	s=1,2
5.5) Ich bewerte die Vorlesung mit folgender Schulnote:	1	6	n=93	mw=1,9	md=2,0	s=0,9
5.6) Ich bewerte das vorlesungsbegleitende Material mit folgender Schulnote:	1	6	n=92	mw=1,9	md=2,0	s=0,8

6. Übungsbetrieb

6.1) Die Aufgaben sind gut auf die Vorlesung abgestimmt.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=77	mw=2,1	md=2,0	s=1,1
6.2) Die Aufgaben sind fehlerfrei und unmissverständlich gestellt.	stimme voll zu	stimme gar nicht zu	n=77	mw=2,2	md=2,0	s=1,0
6.3) Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben empfinde ich als ...	viel zu hoch	viel zu gering	n=78	mw=2,2	md=2,0	s=0,8



Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	6	16.22%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	2	5.41%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	31	83.78%
Gesamt(Brutto)	**39**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	4	10.81%
Keine Antwort	2	5.41%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	31	83.78%
Gesamt(Brutto)	**37**	**100.00%**

Interesse an: Beweis

(1) Basisergänzungssatz und Hausaufgabe 9.4

(2) (Direkte) Summe von (Familie von) Unterräumen

(3) Basispartitionierung

(4) Grundsätzlich Familien- statt Mengenaussagen

(5) Vorgehen beim Bestimmen von Basen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Festigen des Verständnisses von linearer Unabhängigkeit, Basiseigenschaft, (direkten) Summen

Arbeitsplan

(1) Wiederholung grundlegender Definitionen und Wochenüberblick

(2) Details zu Linearer Unabhängigkeit (mit Familien)

(3) True/False Quiz zu linearer Unabhängigkeit/Basen

(4) Kurze Diskussion von $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$

(5) Details zur Summe von Unterräumen

(6) ~~True~~/False Quiz zu Summen von Unterräumen

(7) Untersuchung von Struktur der Unterraumsumme

(1) **Vektorraum**: Abelsche Gruppe $(V, +)$ mit skalarer Multiplikation über Körper.

(2) **Unterraum**: Teilmenge U eines Vektorraums, die wieder Vektorraum mit den Verknüpfungen bildet. → URK, Lineare Hülle

(3) **Lineare Unabhängigkeit**: $0 \in V$ kann nur trivial paarweise verschieden linearkombiniert werden. Beschreibung von Redundanzfreiheit

(4) **Basis**: Linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums
→ Dimension

(5) **Summe von Unterräumen**: Wird elementweise gebildet, stimmt mit linearer Hülle der Vereinigung überein. $U+W = \langle U \cup W \rangle$

(6) **Direkte** Summe von Unterräumen: Summe von Unterräumen mit Trivialschnitt.

(7) **V-komplementärer Unterraum zu U**: Unterraum W, so dass $U \oplus W = V$.

Wochenüberblick

Vektorräume $(V, \oplus, \odot)$ über K

$(V, \oplus)$ abelsche Gruppe, $\odot: V \times K \to V$

Unterstrukturen — Woche 8

Erzeugung

Woche 9

Unterräume U, W

Unterraumkrit

Lineare Hülle $\langle E \rangle$ $\xleftrightarrow{\text{verwandt}}$ **Lineare Unabhängigkeit** (Mengen, Familien)

Summe, direkte Summe

$U + W = \langle U \cup W \rangle$

Dimensionssatz

$U \oplus W \Rightarrow v = u + w$ eindeutig

Komplementarität

Basis

Max. lin. unabh., Min. Erzeugendensystem

Basisergänzungssatz

Austauschsatz

Untereinander gleichmächtig, Nicht inklusionsgeord.,

Dimension

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{v_1, \ldots, v_n \in E,}_{} \quad \underline{v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j} \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, v_\ell = 0$$

endlicher Familie von Elementen

$$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \ldots, n$$

Verbal: Die Null kann nur trivial aus paarw.-verschiedenen Elementen von E linearkombiniert werden.

Achtung: Zu jeder nichtleeren Menge existiert eine nichttriviale LK der Null, nämlich für E, $v \in E$

$$0 = \underbrace{1 \cdot v - 1 v}_{\text{zulässige LK}}$$

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{i_1, \dots, i_n \in I}_{\text{endliche Familie von Indizes}}, \quad \underbrace{i_j \neq i_k \text{ für } j \neq k}_{\text{paarweise versch. Indizes}} \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, v_{i_\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \dots, n.$$

Vektoren können in Familien auftreten.

→ Mengen verhindern Redundanzen.

Lineare Unabhängigkeit III – Mengen und Familien

Wie definiert man also lineare Unabhängigkeit für Mengen/Familien über die Definition von Familien/Mengen?

Mengendefinition über Familien

Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

Die Familie $F: E \to E,\ v \mapsto v$ ist linear unabhängig.

E ist ihre eigene Indexmenge

Familiendefinition über Mengen

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

Die Menge $\{v_i \mid i \in I\}$ ist linear unabhängig und die Familie F ist injektiv.

True/False – Lineare Unabhängigkeit und Basen

Es seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, B eine Basis von V, $E \subseteq F \subseteq V$.
Welche der folgenden Aussagen sind (wann) wahr?

(1) E lin. unabh. $\Rightarrow \langle E \rangle$ lin. unabh. Immer falsch, da $0 \in \langle E \rangle$

(2) E lin. unabh. $\Rightarrow E \subseteq B$ I.A. falsch, gilt aber in Spezialfällen, z.B. $\mathcal{P}(\{x\})$ über $\mathbb{Z}_2$ mit $B = \{\{x\}\}$

(3) E endlich $\Rightarrow \dim\langle E \rangle = \#E$ Gilt genau dann, wenn E linear unabhängig ist.

(4) $B \neq \emptyset$ Gilt genau dann, wenn $V \neq \{0\}$

(5) $E \subsetneq B \Rightarrow E$ ist keine Basis von V Immer wahr, da $B \setminus E \not\subseteq \langle E \rangle$

(6) $V \setminus B$ ist lin. abh. Immer wahr, da $0 \in V \setminus B$

(7) $V \setminus B$ erzeugt V Hängt hauptsächlich v. der Mächtigkeit des Körpers ab. Gilt z.B. für $\mathbb{R}$, $B = \{1\}$ aber nicht für $\mathcal{P}(\{x\})$ über $\mathbb{Z}_2$

(8) Jeder Vektorraum besitzt eine lin. unabh. Teilmenge
Immer wahr, denn jeder besitzt eine Basis

Dimension von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$

Jede Basis ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$

Satz

Es ist $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.

Diskussion: Keine Basis bekannt. Wie zeigt man das?

Option 1: Mengentheoretische Argumente

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar
- Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ erzeugt über $\mathbb{Q}$ einen abzählbaren Raum, aber $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

$\Rightarrow$ Basis muss überabzählbar sein.

Analysis + Zahlentheorie

Option 2: Eine unendliche linear unabhängige Menge angeben. $\{\log(p) \mid p \text{ Primzahl}\}$

Ist $\underbrace{\alpha_1}_{\in \mathbb{Q}} \log(p_1) + \ldots + \alpha_n \log(p_n) = 0$ Multipliziere mit dem Produkt der Nenner der α_i:

(Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung)

$\Rightarrow \underbrace{\beta_1}_{\in \mathbb{Z}} \log(p_1) + \ldots + \beta_n \log(p_n) = 0 \overset{\exp}{\Rightarrow} \underbrace{p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}} = 1 \Rightarrow \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

Lemma

Es sei V ein Vektorraum und U, W Unterräume. Dann gilt

$$\langle U \cup W \rangle_{\oplus,\odot} = U + W$$

Warum sehen wir so ein Resultat erst jetzt? Braucht das wirklich Vektorraumstruktur?

Gilt Folgendes?

Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und U, W mit $\star$ Untergruppen. Dann ist

$$\langle U \cup W \rangle_{\star} = U \star W$$

Nicht immer, siehe z.B. S_3 mit $U = \{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\}$, $W = \{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\}$

$$\left\langle \{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\} \right\rangle = S_3, \quad \# U \star W = 4$$

$\#S_3 = 6$

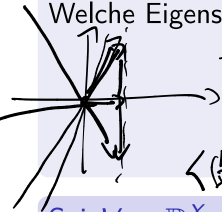
Gilt aber, wenn $U \star W = W \star U$ (die Untergruppen permutieren), denn dann ist $U \star W$ wieder eine Untergruppe ist, die $U \cup W$ enthält. $(V, +)$ ist abelsch

Wir setzen $\sum_{i\in I} U_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} U_i \right\rangle$. Wenn $U_j \cap \sum_{i\in I\setminus\{j\}} U_i = \{0\}$ für alle $j \in I$ gilt, dann schreiben wir die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} U_i$.

Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit den komponentenweisen Verknüpfungen über $\mathbb{R}$

Welche Eigenschaften hat die Summe von $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \right\rangle_{x\in\mathbb{R}}$?

$\left\{ \binom{1}{t} \mid t\in\mathbb{R} \right\}$ lin. abh.



Für $x_1 \neq x_2$ gilt jeweils $\left\langle \binom{1}{x_1} \right\rangle \oplus \left\langle \binom{1}{x_2} \right\rangle = \mathbb{R}^2$, also natürlich $\sum_{t\in\mathbb{R}} \left\langle \binom{1}{t} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

$\left\langle \binom{1}{t} \right\rangle \cap \underbrace{\sum_{x\in\mathbb{R}\setminus\{t\}} \left\langle \binom{1}{x} \right\rangle}_{\leftarrow \mathbb{R}^2} = \left\langle \binom{1}{t} \right\rangle \neq \{0\}$

Sei $V = \mathbb{R}^X$ mit den punktweisen Verknüpfungen über $\mathbb{R}$

Welche Eigenschaften hat die Summe von $\langle e_x \rangle_{x\in X}$?

$\{e_t \mid t\in X\}$ lin. unabh.

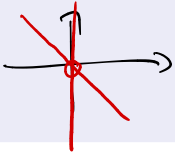
Summe ist immer direkt $\bigoplus_{x\in X} \langle e_x \rangle \overset{?}{=} \sum_{x\in X} \langle e_x \rangle$ Aber $V = \bigoplus_{x\in X} \langle e_x \rangle$ nur wenn X endlich.

Basispartitionierung

Geben Sie zu den unten stehenden Beispielen jeweils eine Basispartitionierung mit den entsprechenden komplementären Unterräumen an.

$V = \mathbb{R}^n$ mit $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ über $\mathbb{R}$ $\quad \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\}$

$\{B\}$



$V = (K[t], +, \cdot)$ mit $B = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ über K

B_2 (über t, t^3), B_1 (unter $1, t^2, t^4$)

$\rightsquigarrow \langle B_1 \rangle = \{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^{2i} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K \}$ ← gerade Koeff.

$\langle B_2 \rangle = \{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^{2i+1} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K \}$ ← ungerade Koeff.

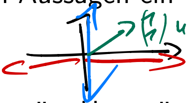
Zu jedem UR ex. ein komplementärer Unterraum! Basisergänzungssatz liefert eine Partition.

~~True~~/False – Summen von Vektorräumen

Es seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, sowie U und W, $\widetilde{W}$ Unterräume von V. Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(1) $U \oplus W = V \Rightarrow V \subseteq U \cup W$.

$\mathbb{R}^2$,



$\binom{1}{1}$ nicht in der Vereinigung

(2) U und $V \setminus U$ sind V-komplementäre Unterräume.

$V \setminus U$ ist i. A. nicht mal ein Vektorraum. Bspl. $\mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\langle\{\binom{1}{0}\}\rangle}_{U}$

Dieses Beispiel funktioniert auch hier

(3) $U + W = V = U + \widetilde{W} \Rightarrow W \cap \widetilde{W} \neq \{0\}$.

(4) $U, W \subsetneq V$ V-komplementär $\Rightarrow$ Es existiert ein zu U und W komplementärer UR.

Dieses Bspl. funktioniert auch hier

(5) Existiert zu U nur ein einziger komplementärer Unterraum, dann ist $U \in \{\emptyset, V\}$

$V = \mathcal{P}(\{x, y\})$ $\quad U = \langle\{\{x\}\}\rangle, W = \langle\{\{y\}\}\rangle$

Zu U ist nur W komplementär

Struktur der Unterraumsumme

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper und

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq V \,|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } V\}$$

die Menge der Unterräume von V mit der üblichen Vektorraumsumme

$$+ \colon \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \qquad U + W := \{u + w \,|\, u \in U \wedge w \in W\}.$$

Welche der folgenden algebraischen Strukturen bildet $(\mathcal{U}, +)$?

(1) Halbgruppe ✓ Assoziativität wird vererbt

(2) Monoid ✓ Neutrales Element ist Nullraum $\{0\}$

(3) Gruppe Genau dann, wenn $V = \{0\}$

Hausaufgabe 9.4

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Dann gilt:

(1) Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

(2) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V.

Beweis. Siehe Musterlösung.