Bitte an der Evaluation teilnehmen :-)

Lineare Algebra I

Woche 09

Montag

12.12.2023 und 14.12.2023 und 18.12.2023

Termin der Plenarübung

lineare Unabhängigkeit

Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

aus K

$$n \in \mathbb{N}, \quad v_1, \ldots, v_n \in E, \quad v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, v_\ell = 0$$

In jeder LK von paarweise verschiedenen Vektoren aus E ist der Nullvektor

$$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \ldots, n$$

nur dann möglich, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind.

Ansonsten heißt die Menge **linear abhängig**. Das heißt: es gibt eine LK von $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedenen Vektoren aus E zum Nullvektor, wobei nicht alle Koeff. Null sind.

Beispiel

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ ist linear abhängig

$$\underbrace{(1+\sqrt{2})} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{Q}$ ist linear unabhängig

$$\underbrace{\alpha_1}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_2}_{\in\mathbb{Q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_3}_{\in\mathbb{Q}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \sqrt{2}\,\alpha_3 \\ \alpha_1 + \sqrt{2}\,\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Beispiel

3. Die Menge der Monome $E = \{1, t, t^2, \dots\}$ im Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist linear unabhängig.

$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \dots + \alpha_n \cdot t^n = 0$ Nullpolynom

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

4. Es sei X eine Menge und $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Die Menge der charakteristischen Funktionen $\{e_y \mid y \in X\}$ ist linear unabhängig in K^X über K

$e_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\alpha_1 e_{y_1} + \alpha_2 e_{y_2} + \dots + \alpha_n e_{y_n} = 0$ (Nullfunktion)

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$

lineare Abhängigkeit bedeutet Kombinierbarkeit

Lemma

Es sei V ein Vektorraum. Dann sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.

Beweis. Hausaufgabe

- Lineare Unabh. bedeutet: kein $v \in E$ ist LK von $E \setminus \{v\}$
- Die leere Menge $\emptyset$ ist linear unabhängig.

lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz

Lemma

Es sei V ein Vektorraum. Dann sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$, sodass gilt:

$$\langle E \setminus \{v\} \rangle = \langle E \rangle.$$

Die lineare Hülle wird also nicht kleiner!

Beweis. ① ⇒ ② Folie 5 ⇒ Es gibt $v \in E$ mit $v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$ mit $\beta_i \in K$, $v_i \in E \setminus \{v\}$. Es sei $w \in \langle E \rangle$, also $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$ mit $\alpha_i \in K$, $w_i \in E$. Wenn $v \in \{w_1, \ldots, w_n\}$, so ersetze es durch $v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$. Somit ist $w \in \langle E \rangle$ als LK von $E \setminus \{v\}$ dargestellt.

② ⇒ ① $v \in \langle E \rangle$ ist LK von E und sogar von $E \setminus \{v\}$. Folie 5 → linear abhängig

lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Linearkomb.

Lemma

Es sei V ein Vektorraum. Dann sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear unabhängige Menge.
2. Jeder Vektor $v \in \langle E \rangle$ lässt sich in eindeutiger Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweisen verschiedenen Vektoren der Menge E linearkombinieren.

lineare (Un)abhängigkeit von Teil- und Obermengen

Es sei V ein Vektorraum.

Lemma

1. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge in V ist ebenfalls linear unabhängig.
2. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge in V ist ebenfalls linear abhängig.

Beweis. folgt sofort aus der Definition

Definition

Es sei V ein Vektorraum.

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt eine **Basis** von V, wenn

- B linear unabhängig ist und — nicht zu groß
- $\langle B \rangle = V$ gilt. — nicht zu klein

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (ES).

Basis

Beispiel

1. Im Standardvektorraum K^n über einem Körper K — $n \in \mathbb{N}$

$$\{e_1, \dots, e_n\} \text{ mit } e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-tes Eintrag}$$

eine Basis, genannt die kanonische Basis (Standardbasis) von K^n.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Beispiel

2. Die Menge $E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein ES
von $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, aber linear abhängig, also keine Basis.
Jede 2-elementige Teilmenge ist aber eine Basis.

3. Es sei $(K[t], +, \cdot)$ der Polynomraum über einem Körper $(K, +, \cdot)$.

   Die Monome $E = \{1, t, t^2, \ldots\}$ sind linear unabhängig (Folie 4) und erzeugen $K[t]$ (Woche 08, Folie 26).

   Die Monome $E = \{1, t, \ldots, t^n\}$ sind linear unabhängig und den UR $K_n[t]$, die Polynome mit Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$.

Basis

Beispiel

4. $\emptyset$ ist die einzige Basis des Nullraumes $\{0\}$ über jedem Körper K.

$\emptyset$ ist linear unabh. und $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

5. $\{1, i\}$ ist eine Basis von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Die LK $a \cdot 1 + b \cdot i$ erzeugen $\mathbb{C}$.
$\in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

6. Für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist keine Basis bekannt.

Existenz folgt aus Basisergänzungssatz und damit aus dem Auswahlaxiom.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
   Jede echte Obermenge von B ist linear abhängig.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
   Jede echte Teilmenge von B erzeugt nicht mehr den ganzen Vektorraum V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis. ① $\Rightarrow$ ② B ist nach Def. linear unabhängig und $\langle B \rangle = V$. Für beliebigen $v \in V \setminus B$ ist $\langle B \cup \{v\} \rangle = V$. Nach Folie 06 (lin. Abh. $\Leftrightarrow$ Redundanz) bedeutet das: $B \cup \{v\}$ linear abhängig.

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis. ② $\Rightarrow$ ① Zu zeigen ist: $\langle B \rangle = V$. Es sei $v \in V$ beliebig. Falls $v \in B$ ist, dann ist wegen $B \subseteq \langle B \rangle$ auch $v \in \langle B \rangle$. Andernfalls ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig. Also ex. $n \in \mathbb{N}_0$, $v_i \in B$, $\alpha_i \in K$ und $\alpha \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \alpha v = 0$. Dabei ist $\alpha \neq 0$, sonst wäre bereits B linear abhängig.
$\Rightarrow$ $v = \sum_{i=1}^n \underline{-\alpha^{-1} \alpha_i} v_i$, d.h. $v \in \langle B \rangle$.

Charakterisierung von Basen

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Beweis. ① ⇒ ③ $\langle B \rangle = V$ ist klar. Wegen Folie 06 (Redundanz ⇔ lin. Abh.) folgt, dass für alle $v \in B$ gilt: $\langle B \setminus \{v\} \rangle \subsetneq V$ (echte Teilmenge), also B ist minimales Erzeugendensystem.

③ ⇒ ① $\langle B \rangle = V$ ist klar. Für alle $v \in B$ gilt: $\langle B \setminus \{v\} \rangle \subsetneq V$. Wieder Folie 06: B ist linear unabhängig, also Basis.

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1. B ist eine Basis von V.
2. B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
4. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus Elementen von B linearkombinieren.

paarweise verschiedenen

Beweis. ① $\Rightarrow$ ④ Folie 07: Jedes $v \in \langle B \rangle = V$ lässt sich i.W. eindeutig aus B linearkombinieren.

④ $\Rightarrow$ ① $\langle B \rangle = V$, und aus Folie 07 folgt die lineare Unabhängigkeit von B.

Basisergänzungssatz

Satz

Es sei V ein Vektorraum.

Es sei

- A eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus V
- E ein Erzeugendensystem von V mit der Eigenschaft $A \subseteq E$.

Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq E$.

Der Beweis verwendet das Auswahlaxiom in Form des Lemmas von Zorn.

$A \subseteq B \subseteq E$

linear unabhängig — linear unabh. — evtl. linear abhängig

evtl. $\langle A \rangle \subsetneq V$ — $\langle B \rangle = V$ — $\langle E \rangle = V$

Wenn V endlich erzeugt ist, dann gibt es einen konstruktiven Beweis ohne das Lemma von Zorn.

Basisergänzungssatz

Folgerung $A = \emptyset, \quad E = V$

Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

Folgerung $A = \emptyset$

Aus jedem Erzeugendensystem E eines Vektorraumes V lässt sich eine Basis auswählen.

Folgerung $E = V$

Jede linear unabhängige Menge A eines Vektorraumes V kann zu einer Basis erweitert werden.

Dimension eines Vektorraumes

Definition

Es sei V ein Vektorraum.

$\# B = n \in \mathbb{N}_0$

1. Wenn V eine Basis B der endlichen Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt, so sagen wir, V habe die **endliche Dimension** n.

   $\dim V = n$

2. Wenn V keine Basis endlicher Kardinalität besitzt, so sagen wir, V habe **unendliche Dimension**, in Symbolen: $\dim V = \infty$.

- Sind alle Basen eines VR entweder alle endlich oder alle unendlich?
- Hat jede endliche Basis dieselbe Kardinalität?

Austauschlemma

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Die endliche Menge $B = \{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V mit $n \in \mathbb{N}$. Mit

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$\boxed{\alpha_j \neq 0}$$

ist auch

$$B_0 := \{v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$$

eine Basis von V.

Wir tauschen v_j aus durch eine beliebige LK w aus, in der v_j „echt" vorkommt.

Austauschsatz von Steinitz

Satz

Es sei V ein Vektorraum und $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V mit $\#B = n \in \mathbb{N}_0$.

Ist $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ eine linear unabhängige Menge in V mit $\#A = m \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

1. $m \leqslant n$.
2. Es gibt eine $(n - m)$-elementige Teilmenge D von B, sodass $B_0 := A \cup D$ ebenfalls eine Basis von V ist. Es gilt $\#B_0 = n$.

Beweis durch Induktion nach $m = \#A$.

Die neue Basis B_0 hat dieselbe Kardinalität wie B.

Dimension ist wohldefiniert

Folgerung

Es sei V ein Vektorraum.

1. Wenn V endlich erzeugt ist, dann ist jede Basis von V endlich, und alle Basen haben dieselbe Mächtigkeit.
2. Wenn V nicht endlich erzeugt ist, dann ist jede Basis von V unendlich.

Beweis. ① Es sei E ein endliches Erzeugendensystem. Nach Basiserg.satz ex. eine Teilmenge von E (auch endlich!), die Basis ist, sagen wir $B \subseteq E$ mit $\#B =: n \in \mathbb{N}_0$. Es sei B_0 eine weitere Basis (möglicherweise unendlich). Dann ist jede endliche Teilmenge $B_1 \subseteq B_0$ linear unabhängig. Austauschsatz $\Rightarrow \#B_1 \le n$.
$\Rightarrow \#B_0 \le n = \#B$. Tausch der Rollen: $\#B \le \#B_0$, also $\#B = \#B_0$. ② Wäre B endliche Basis, dann auch endliches ES

Beispiel

1. Der „Standardvektorraum der Dimension n" K^n über einem Körper K hat tatsächlich die Dimension $n \in \mathbb{N}$.

   $\# \underbrace{\{e_1, \ldots, e_n\}}_{\text{Standard-Basis}} = n$

2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ (keine Basis bekannt)

   Jeder Körper als VR über sich selbst hat Dim. 1 !

3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ Basis $\{1, i\}$

4. $\dim\{0\} = 0$ Die einzige Basis ist $\emptyset$.

Beispiel

5. Der Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ hat
   $\dim K[t] = \infty$, da die Monome $\{1, t, t^2, \ldots\}$ eine unendliche Basis bilden.

6. Der Unterraum der Polynome $(K_n[t], +, \cdot)$ vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$
   hat die Basis $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, also
   $\dim K_n[t] = n+1$.

Folgerung

Zusatzinformation

Es sei V ein Vektorraum der $\boxed{\text{Dimension } n \in \mathbb{N}_0.}$

1. Ist $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge, dann gilt $\#A \leqslant n$.
2. $A \subseteq V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn A linear unabhängig ist und $\#A = n$ gilt.
3. Für jeden Unterraum U von V gilt: $0 \leqslant \dim U \leqslant \dim V$.
4. Für jeden Unterraum U von V gilt $U = V$ genau dann, wenn $\dim U = \dim V$ ist.

Es sei V ein Vektorraum und U, W Unterräume.

$U \cup W$ ist im Allgemeinen kein Unterraum. $U \cup W$ ist UR $\Leftrightarrow U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$

Lemma

$$\langle \underbrace{U \cup W}_{\text{Menge aller LK von } U \cup W} \rangle = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Beweis. $M := \langle U \cup W \rangle$ = Menge aller LK aus $U \cup W$

- $U + W \subseteq M$: $\underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} = 1 \cdot u + 1 \cdot w \in M$
- $M \subseteq U + W$: $v \in M$ hat die Darstellung

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i}_{\in \langle U \rangle = U} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j}_{\in \langle W \rangle = W}$$

mit $u_i \in U$, $w_j \in W$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha_i, \beta_j \in K$

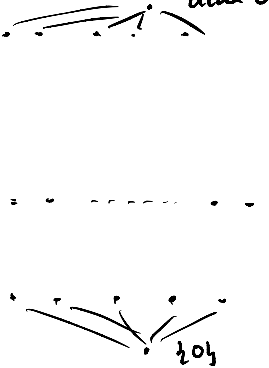
$\Rightarrow v \in U + W$

Halbordnung auf der Menge aller Unterräume

Es sei V ein Vektorraum und

$$M := \{ U \subseteq V \mid U \text{ ist Unterraum von } V \}.$$

Dann sind $\le$ und „ist UR von" zwei identische Halbordnungen auf M. Sortierung nach der Dimension



$\dim U = n = \dim V$

$\dim U = n-1$

$\dim U = 2$

$\dim U = 1$

$\{0\}$ $\dim U = 0$

Die halbgeordnete Menge M hat die Eigenschaft, dass für alle 2-elementigen Teilmengen $\{U, W\}$ stets

$\inf\{U, W\} = U \cap W$

$\sup\{U, W\} = U + W$

existieren.

Dimension der Summe zweier Unterräume

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei endlich-dimensionale Unterräume von V. Dann gilt

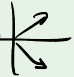
$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \overbrace{\dim(U \cap W)}^{\text{doppelt abgedeckt}}.$$

Beispiel

1.
$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \text{ in } \mathbb{R}^2 \text{ über } \mathbb{R}$$

$$U + W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2 \qquad U \cap W = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{2} = \underbrace{\dim(U)}_{1} + \underbrace{\dim(W)}_{1} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{0}$$



2.
$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ in } \mathbb{R}^3 \text{ über } \mathbb{R}$$

$$U + W = \mathbb{R}^3 \qquad U \cap W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{3} = \underbrace{\dim(U)}_{2} + \underbrace{\dim(W)}_{2} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{1}$$

Beispiel

3.

$$U = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle t, t^3, t^4 \rangle$$ in $K_5[t]$ über K

$U + W = K_5[t]$ $\qquad$ $U \cap W = \langle t^3 \rangle$

$$\underbrace{\dim(U+W)}_{6} = \underbrace{\dim(U)}_{4} + \underbrace{\dim(W)}_{3} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{1}$$

$$6 = 4 + 3 - 1$$

direkte Summe von zwei Unterräumen

Definition

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Die Summe $U + W$ heißt **direkt**, wenn $U \cap W = \{0\}$ gilt. kein Überlapp

In Symbolen: $U \oplus W$

Beispiel

1. $$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$ in $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$

   $U \cap W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, also ist $U \oplus W$ eine direkte Summe.

2. $$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$

   $U \cap W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, also ist $U + W$ keine direkte Summe.

Charakterisierung direkter Summen von zwei Unterräumen

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Dann sind äquivalent:

1. $V = U \oplus W$.
2. Für alle $v \in V$ existieren $\boxed{\text{eindeutige}}$ Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

3. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis. ① $\Rightarrow$ ② $V = U \oplus W \Rightarrow V = U + W$. Für $v \in V$ gibt es $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$. Sei $v = u' + w'$ eine zweite Darstellung $\Rightarrow \underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \in U \cap W = \{0\}$.
$\Rightarrow u = u'$ und $w = w'$.

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Dann sind äquivalent:

1. $V = U \oplus W$.
2. Für alle $v \in V$ existieren eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

3. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis. ② ⇒ ① $V = U + W$ ist klar. Zu zeigen: $U \cap W = \{0\}$.
Es sei $v \in U \cap W$, dann ist $v = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W}$.
Die Eindeutigkeit zeigt $v = 0$, also ist $U \cap W = \{0\}$.

Satz

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V.

Dann sind äquivalent:

1. $V = U \oplus W$.
2. Für alle $v \in V$ existieren eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

3. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis. ① ⇒ ③ $\dim V = \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0} = \dim(U) + \dim(W)$

③ ⇒ ① $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) \overset{\text{Dim. formel}}{=} \dim(U+W) + \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0} = \dim(U+W) \Rightarrow U+W = V$ und $U \cap W = \{0\}$.

genauer: disjunkte Zerlegung in Teilmengen B_1 / B_2

Satz

Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt:

1. Ist B eine Basis von V und $\{B_1, B_2\}$ eine Partition von B, dann gilt $V = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$.
2. Sind U_1, U_2 Unterräume von V mit Basen B_1, B_2 und gilt $V = U_1 \oplus U_2$, so ist $\boxed{B_1 \cup B_2}$ eine Basis von V.

Basen einfach vereinigen

W ist kompl. zu U $\Leftrightarrow$ U ist kompl. zu W

Definition

Es seien V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V.

1. Ein Unterraum W von V heißt ein **zu U komplementärer Unterraum** in V, wenn $V = U \oplus W$ gilt. „W ergänzt U optimal zu V"
2. Die Dimension $\dim(W)$ eines zu U komplementären Unterraumes W heißt die **Kodimension** von U in V. $\operatorname{codim}(U)$ endlich oder ∞

Wenn V endlich-dimensional ist, gilt

$$\operatorname{codim}(U) = \dim(V) - \dim(U), \quad \text{denn:}$$

$$\dim(V) = \dim(U) + \underbrace{\dim(W)}_{=\operatorname{codim}(U)} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0}.$$

Folgerung

Es seien V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V.

Dann existiert ein zu U komplementärer Unterraum W in V.

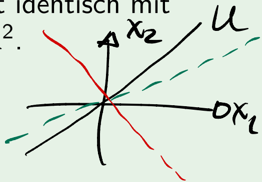
Auswahlaxiom

Beweis. Es sei B_U eine Basis* von U.
Mit Basisergänzungssatz* können wir B_U zu einer Basis von V erweitern. Wir setzen $B_W := B \setminus B_U$.
Folie 36: $V = \langle B_U \rangle \oplus \langle B_W \rangle = U \oplus \underbrace{\langle B_W \rangle}_{=:W}$

komplementäre Unterräume

Beispiel

1. Jeder eindimensionale Unterraum W, der nicht identisch mit $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ist, ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^2$.



2. Jeder zweidimensionale Unterraum W, der den Unterraum $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ nicht enthält, ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^3$.

komplementäre Unterräume

Beispiel

3. Die komplementären Unterräume des Unterraumes $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$ der konvergenten Folgen im Vektorraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ haben keine einfache Darstellung.

Definition

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Der Unterraum

$$\sum_{i \in I} U_i := \Big\langle \bigcup_{i \in I} U_i \Big\rangle$$

heißt die **Summe der Familie von Unterräumen** $(U_i)_{i \in I}$.

Es gilt Rechtfertigung für das Symbol Σ

$$\sum_{i \in I} U_i = \Big\{ \sum_{i \in I_0} U_i \;\Big|\; I_0 \subseteq I \text{ ist eine endliche Teilfamilie} \Big\}$$

$$= \left\{ \sum_{i \in I_0} u_i \;\middle|\; \begin{array}{l} I_0 \subseteq I \text{ ist eine endliche Teilfamilie} \\ \text{und } u_i \in U_i \text{ für alle } i \in I_0 \end{array} \right\}$$

Definition

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Die Summe $\sum_{i \in I} U_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ heißt **direkt**, wenn gilt:

$$U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\} \quad \text{für alle } j \in I.$$

Wir schreiben dann $\bigoplus_{i \in I} U_i$.

$I = [\![1, n]\!]: \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$

Beispiel

1. Für den Standardvektorraum K^n über einem Körper K mit den Basisvektoren e_i für $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle e_i \rangle$$

$$\langle e_j \rangle \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \langle e_i \rangle = \{0\}$$

2. Für den Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper K mit der Basis $B = \{1, t, t^2, \ldots\}$ gilt

$$K[t] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \langle t^i \rangle$$

Charakterisierung direkter Summen von Unterräumen

Satz

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

1. $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.
2. Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf die Summation von Nullvektoren) eindeutig.

Beweis. Hausaufgabe

direkte Summe von Unterräumen, Basispartionierung

Satz

Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt:

1. Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

2. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V.

Beweis. Hausaufgabe