Lineare Algebra I

Woche 08

05.12.2023 und 07.12.2023

Vektorraum

Definition

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Ein **Vektorraum** $(V, \oplus, \odot)$ **über** K ist eine Menge V mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus\colon V \times V \to V$
- einer **äußeren Verknüpfung** $\odot\colon K \times V \to V$

1. $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

2. Es gilt das **Assoziativgesetz**

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$$

Vektorraum

Definition

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Ein **Vektorraum** $(V, \oplus, \odot)$ **über** K ist eine Menge V mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus\colon V \times V \to V$
- einer **äußeren Verknüpfung** $\odot\colon K \times V \to V$

3. Es gelten die **Distributivgesetze**

$$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$
$$(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$$

4. Das neutrale Element 1_K bzgl. $\cdot$ in K ist auch neutral bzgl. $\odot$:

$$1_K \odot v = v.$$

Beispiel

1. Jeder Körper $(K, +, \cdot)$, ausgestattet mit den Verknüpfungen $\oplus := +$ und $\odot := \cdot$, ist ein Vektorraum über sich selbst.

2. Allgemeiner ist jeder Körper $(K, +, \cdot)$ ein Vektorraum über jedem seinem Unterkörper $(U, +, \cdot)$.

Vektorraum

Beispiel

3. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

   Die Menge

   $$K_n := \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

   mit der **komponentenweisen Addition**

   $$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) :=$$

   und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

   $$\alpha \odot (x_1, \dots, x_n) :=$$

   heißt der **Vektorraum der Zeilenvektoren** über K der Dimension n.

Beispiel

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

   Die Menge

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_i \in K \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}$$

   mit der **komponentenweisen Addition** und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \qquad\qquad \text{und} \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$$

   heißt der **Vektorraum der Spaltenvektoren** über K der Dimension n.

Vektorraum

Beispiel

5. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine Menge.

   Die Menge $K^X = \{f \mid f\colon X \to K\}$ mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) :=$$

$$(\alpha \odot f)(x) :=$$

   ist ein Vektorraum über K.

Beispiel

6. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[t]$ der Polynomring.

   Dann ist $K[t]$ mit der **Addition**

   $$p \oplus q := \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) \cdot t^i$$

   und der **skalaren Multiplikation**

   $$\alpha \odot p := \sum_{i=0}^{m} \alpha \cdot a_i \cdot t^i$$

   der **Polynomraum** über K.

Rechenregeln in Vektorräumen

Lemma

1. $0_K \odot v = 0_V = v \odot 0_K$

2. $\alpha \odot 0_V = 0_V$

Beweis.

Rechenregeln in Vektorräumen

Lemma

3. $\alpha \odot v = 0_V \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0_K$ oder $v = 0_V$

4. $\alpha \odot (\ominus v) = \ominus (\alpha \odot v) = (-\alpha) \odot v$

Beweis.

Linearkombination

Definition

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$ und $E \subseteq V$.

Ein Vektor der Form

$$\alpha_1 \odot v_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot v_n \quad \text{oder kurz} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \odot v_j$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und

- **Koeffizienten** $\alpha_j \in K$
- Vektoren $v_j \in E$

heißt eine **Linearkombination der Menge** E.

Linearkombination

Beispiel

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkomb. der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \qquad \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \qquad \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkomb. der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \qquad \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \qquad \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Linearkombination

Beispiel

3. Die Funktion

   ist eine Linearkombination der Menge $\{\sin, \cos\}$ in $\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$.

4. Das Polynom

   ist eine Linearkombination der Menge $\left\{t^2, t, 1\right\}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

5. Das Polynom

   ist **keine** Linearkombination der Menge $\left\{t^2, t, 1\right\}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

Unterraum

Definition

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

1. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Unter(vektor)raum** von $(V, \oplus, \odot)$,
   - wenn U bzgl. $\oplus$ abgeschlossen ist
   - und wenn U bzgl. $\odot$ mit Elementen in K abgeschlossen ist
   - und wenn $(U, \oplus, \odot)$ selbst wieder ein Vektorraum ist.
2. Ein Unterraum $(U, \oplus, \odot)$ von $(V, \oplus, \odot)$ heißt **echt**, wenn $U \subsetneq V$ gilt.

Unterraumkriterium

Satz

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, \oplus, \odot)$ ist ein Unterraum von $(V, \oplus, \odot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
3. $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \, \oplus \, K \odot U \subseteq U$.

Beweis.

Unterraumkriterium

Satz

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, \oplus, \odot)$ ist ein Unterraum von $(V, \oplus, \odot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
3. $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.

Beweis.

Unterraumkriterium

Satz

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, \oplus, \odot)$ ist ein Unterraum von $(V, \oplus, \odot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
3. $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \; \oplus \; K \odot U \subseteq U$.

Beweis.

Beispiel

1. Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

   Dann sind

   - $(\{0_V\}, \oplus, \odot)$
   - $(V, \oplus, \odot)$

   die **trivialen Unterräume** von $(V, \oplus, \odot)$.

2. $$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 - 2\,x_2 = 0 \right\}$$

Unterraum

Beispiel

3.
$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 - 2\,x_2 = 1 \right\}$$

4.
$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \geqslant 0,\; x_2 \geqslant 0 \right\}$$

Vereinfachung der Notation

1. Wir schreiben $+$ an Stelle von $\oplus$.
2. Wir schreiben $\cdot$ an Stelle von $\odot$ oder lassen es sogar weg.
3. Wir schreiben 0 an Stelle von 0_K und auch an Stelle von 0_V.
4. Wir schreiben 1 an Stelle von 1_K.
5. Wir nennen den zugrundeliegenden Körper eines Vektorraumes nur bei Bedarf.

Durchschnitt von Unterräumen

Lemma

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$.

Beweis. Hausaufgabe

erzeugter Unterraum

Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E \subseteq V$.

Dann heißt

$$\langle E \rangle := \bigcap \{ U \,|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \}$$

- der von E **erzeugte Unterraum**
- oder die **lineare Hülle** $\operatorname{Lin}(E)$ von E
- oder auch der **Spann** $\operatorname{Span}(E)$ von E

in $(V, +, \cdot)$.

Darstellung des erzeugten Unterraumes

Satz

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$ und $E \subseteq V$.

Dann gilt für den von E erzeugten Unterraum:

$$\langle E \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \, v_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \Big\}.$$

Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle E \rangle \coloneqq \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \big\}$$

$$M \coloneqq \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \Big\}$$

Beweis.

Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle E \rangle \coloneqq \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \big\}$$

$$M \coloneqq \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \Big\}$$

Beweis.

Beispiel

1. $E = \{1, t, \dots, t^n\}$ im Polynomraum $K[t]$ über einem Körper K

$$\langle E \rangle =$$

2. $E = \{1, t, t^2, \dots\}$ im Polynomraum $K[t]$ über einem Körper K

$$\langle E \rangle =$$

Beispiel

3. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Menge. Die Menge

$$E = \Big\{ \quad \Big|\, i = 1, \ldots, n \Big\}$$

bildet ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(K^X, +, \cdot)$:

Beispiel

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine beliebige Menge. Die Menge

$$E = \{ \quad | \, x \in X \}$$

erzeugt den Unterraum

$$\langle E \rangle =$$

Familien statt Mengen

Definition

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

Ein Vektor der Form

$$\alpha_1 \odot v_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot v_n \quad \text{oder kurz} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \odot v_{i_j}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und

- **Koeffizienten** $\alpha_j \in K$
- Vektoren $v_{i_j} \in E$ mit Indizes $i_j \in I$

heißt eine **Linearkombination der Familie** F.

Familien statt Mengen

Definition

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

Dann heißt

$$\langle F \rangle := \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U,+,\cdot) \text{ ist Unterraum von } (V,+,\cdot) \text{ und } \{v_i \,|\, i \in I\} \subseteq U \big\}$$

- der von F **erzeugte Unterraum**
- oder die **lineare Hülle** $\operatorname{Lin}(F)$ von F
- oder auch der **Spann** $\operatorname{Span}(F)$ von F

in $(V,+,\cdot)$.

Es gilt

$$\langle F \rangle = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_{i_j} \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall j = 1,\ldots,n \; \exists i_j \in I \; (v_{i_j} \in F, \; \alpha_j \in K) \Big\}.$$