Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 08

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	4	20.00%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	5.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	2	10.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	55.00%
Gesamt(Brutto)	**18**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	4	20.00%
Keine Antwort	5	25.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	55.00%
Gesamt(Brutto)	**20**	**100.00%**

Zentrales Thema: Unterräume und Erzeugung.

Ansagen: Komplexe Zahlen, Übungsblattpunkte, Klausurfokus, Evaluation

Möglichkeiten für das „freie“ Plenum 09a

Ausfallen lassen oder folgende Themen

(1) Crashkurs komplexe Zahlen

(2) „How to read/write mathematics“

(3) Rückblick und Wiederholung der vergangenen Wochen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen
(2) Abschnittsbezeichnung motivieren
(3) Intuition zur Erzeugung verbessern

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick
(2) Zusammenhang LGS und Linearkombinationen
(3) Erzeugung wiederholen
(4) Zwei Resultate zur Linearen Hülle
(5) Exkurs Hüllenoperatoren

Wochenüberblick

Die Bezeichnung „lineare Algebra“

Ursprünglich

Algebra wurde lange synonym zu „Lösen von Gleichungen“ verwendet.
Linear meint „Linien, kein Krümmungen“

$\Rightarrow$ Lösen linearer Gleichungssysteme

Inzwischen

Strukturen, strukturerhaltende Abbildungen, Erzeugung, Abgeschlossenheit

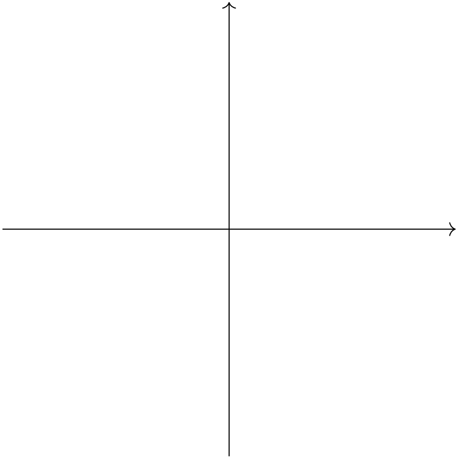
Lösen eines linearen Gleichungssystems

Für $a, b \in \mathbb{R}$, finde eine Lösung $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} \alpha_1 \phantom{{}+2\,\alpha_2} &= a \\ \alpha_1 + 2\,\alpha_2 &= b. \end{aligned}$$

Erzeugen eines Vektors

Intuitives Verhalten von Vektoren



Die Bedeutung des Körpers

Ist die Menge

$$U := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a - 2\,b = 0\}$$

ein Untervektorraum des Vektorraums $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

Intuition zur Erzeugung

Erzeugte Untergruppen

Definition

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Dann ist die von $E \subseteq G$ **erzeugte Untergruppe**

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &:= \bigcap \left\{ U \,\middle|\, (U, \star) \text{ ist Untergruppe von } (G, \star) \text{ und } E \subseteq U \right\} \\ &= \left\{ a_1 \star \ldots \star a_n \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (a_i \in E \cup E') \right\}\end{aligned}$$

Erzeugte Unterräume

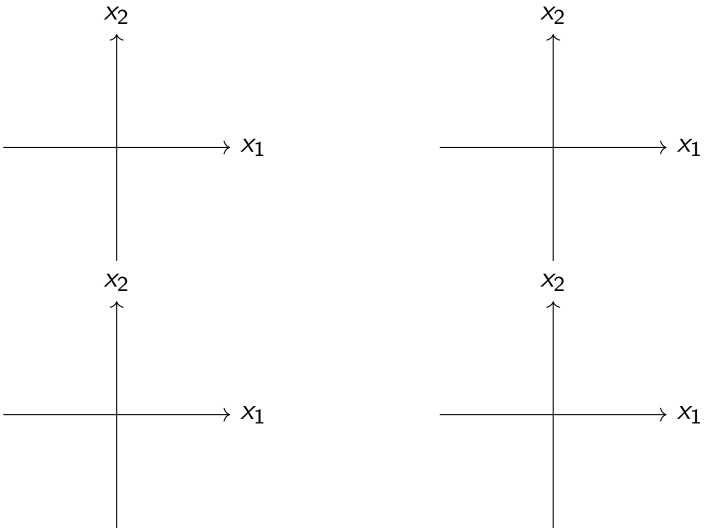
Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann ist der von $E \subseteq V$ **erzeugte Unterraum**

$$\langle E \rangle := \bigcap \left\{ U \,\middle|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \right\}$$

Visualisierung von Erzeugung in $\mathbb{R}^2$



Erzeugung in weniger intuitiven Vektorräumen

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Menge.

$$E = \left\{ e_{x_i} \,\middle|\, i = 1, \ldots, n \right\}$$

bildet ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(K^X, +, \cdot)$

Familien statt Mengen

Definition

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V. Dann heißt

$$\langle F \rangle := \bigcap \Big\{ U \,\Big|\, (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } \{ v_i \,|\, i \in I \} \subseteq U \Big\}$$

$$= \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_{i_j} \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall j = 1, \ldots, n \; \exists i_j \in I \; (v_{i_j} \in F, \; \alpha_j \in K) \Big\}$$

der von F **erzeugte Unterraum**.

Lineare Hüllenbildung ist Ordnungshomomorphismus

Lemma

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann sind $(\mathcal{P}(V), \subseteq)$ und $(\{U \in \mathcal{P}(V) \mid U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V\}, \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq})$ partiell geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass die Hüllenbildung $\langle \cdot \rangle \colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ ein **Ordnungshomomorphismus** ist, also dass für $E, F \in \mathcal{P}(V)$ gilt:

$$E \subseteq F \;\Rightarrow\; \langle E \rangle \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} \langle F \rangle$$

Beweis.

Ein Resultat zur linearen Hülle

Lemma

Es sei V ein Vektorraum und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen $B_i \subseteq V$. Dann gilt:

$$\left\langle \bigcup_{i\in I} B_i \right\rangle = \left\langle \bigcup_{i\in I} \langle B_i \rangle \right\rangle$$

Beweis.

Exkurs Hüllenoperatoren und Abschlusssysteme

Hüllenoperatoren

Ist V Menge heißt $H\colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ **Hüllenoperator**, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
E &\subseteq H(E) && H \text{ ist extensiv,}\\
E \subseteq F &\Rightarrow H(E) \subseteq H(F) && H \text{ ist monoton (bzgl. Mengeninklusion),}\\
H(E) &= H(H(E)) && H \text{ ist idempotent,}
\end{aligned}
$$

Abschlusssysteme

Eine Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(V)$ heißt **Abschlusssystem**, wenn gilt:

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \bigcap \mathcal{Y} \in \mathcal{X}.$$