Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 08

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	4	20.00%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	5.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	2	10.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	55.00%
Gesamt(Brutto)	**18**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	4	20.00%
Keine Antwort	5	25.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	55.00%
Gesamt(Brutto)	**20**	**100.00%**

Zentrales Thema: Unterräume und Erzeugung.

Ansagen: Komplexe Zahlen, Übungsblattpunkte, Klausurfokus, Evaluation

Möglichkeiten für das „freie“ Plenum 09a

Ausfallen lassen oder folgende Themen

(1) Crashkurs komplexe Zahlen

(2) „How to read/write mathematics“

(3) Rückblick und Wiederholung der vergangenen Wochen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen
(2) Abschnittsbezeichnung motivieren
(3) Intuition zur Erzeugung verbessern

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick
(2) Zusammenhang LGS und Linearkombinationen
(3) Erzeugung wiederholen
(4) Zwei Resultate zur Linearen Hülle
(5) Exkurs Hüllenoperatoren

Wochenüberblick

Halbgruppen $H, *$ $\xrightarrow{e}$ Monoide $(H,*), e$ $\xrightarrow{a^{-1}}$ Gruppen $(G,*)$ $\xrightarrow{(R,\cdot)\ \text{HG}}$ Ringe $(R,+,\cdot)$ $\to$ Polynome $R[t]$

Gruppen $(G,*)$ $\xrightarrow{(R\setminus\{0\},\cdot)\ \text{abelsche G.}}$ Körper $(K,+,\cdot)$

Körper $(K,+,\cdot)$ $\xrightarrow{\text{Skalare Multiplikation}\ \odot: K \times V \to V}$ Vektorraum

Vektorraum $(V,+,\odot) \triangleq (V,K,+,\odot)$

$V \times V \to V$ $\quad$ $V \times K \to V$

$0_V \neq 0_K, 1_K$

- 1_K weiterhin neutral, nur $0_K, 0_V$ "kollen" in $\odot$ (Lemma 12.4)
- Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ $\quad n \in \mathbb{N}_0$ (Leere Summen sind möglich, Summen sind endlich!)
- Unterräume, Unterraumkriterium
  ↳ Erzeugung, lineare Hülle $\langle G \rangle$, Darstellung der lin. Hülle über Linearkombinationen

Die Bezeichnung „lineare Algebra“

Ursprünglich

Algebra wurde lange synonym zu „Lösen von Gleichungen“ verwendet.
Linear meint „Linien, kein Krümmungen“

$\Rightarrow$ Lösen linearer Gleichungssysteme

Inzwischen

Strukturen, strukturerhaltende Abbildungen, Erzeugung, Abgeschlossenheit

Lösen eines linearen Gleichungssystems

Für $a, b \in \mathbb{R}$, finde eine Lösung $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ von

Variablen vom LGS

$$
\begin{aligned}
1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 &= a \\
1\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 &= b.
\end{aligned}
$$

Rechte Seite

$\Rightarrow \alpha_1 = a$, $\alpha_2 = \frac{b-a}{2}$

Koeffizienten des LGS

$\Updownarrow$ gleichwertig

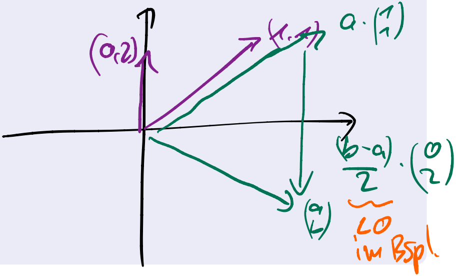
Erzeugen eines Vektors

Finde LK-Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass

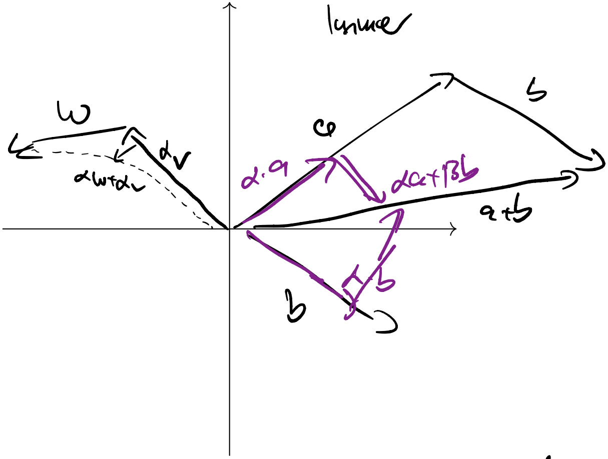
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Rechte Seite

Koeffizienten der Linearkombination



Intuitives Verhalten von Vektoren



Das sichern die gemischten Distr. und Ass.-Gesetze.

Die Bedeutung des Körpers

Ist die Menge

$$U := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a - 2\,b = 0\}$$

ein Untervektorraum des Vektorraums $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Das kommt auf den zugrunde liegenden Körper an!

Über $\mathbb{R}$ ja, denn (UVK)

- $0 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$
- $x = a + bi$, $y = c + di$ aus U und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann

$\alpha x = \alpha a + \alpha b i \Rightarrow \alpha a - 2(\alpha b) = \alpha(\underbrace{a - 2b}_{0}) = 0 \Rightarrow \alpha x \in U$

$x + y = (a+c) + (b+d)i$

$\Rightarrow a + c - 2(b+d) = (\underbrace{a - 2b}_{0}) + (\underbrace{c - 2d}_{0}) = 0$ ✓

Über $\mathbb{C}$ nicht, denn

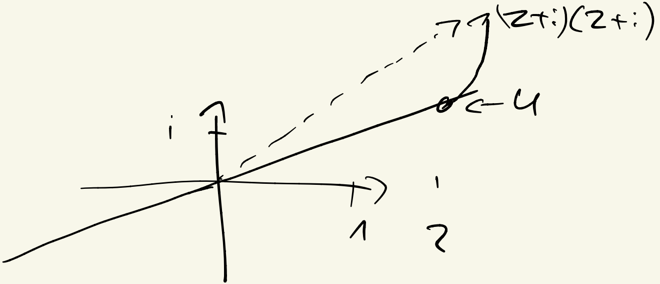
$2 + i \in U$ aber

$\underbrace{(2+i)}_{\text{Skalar aus } \mathbb{C} \text{ als Körper}} \cdot \underbrace{(2+i)}_{\text{Vektor aus } U \subseteq \mathbb{C}} = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$

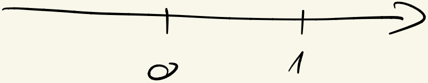
und $3 - 2 \cdot 4 = -5 \neq 0$

Also U nicht abgeschlossen bzgl. S-Multiplikation mit $\mathbb{C}$

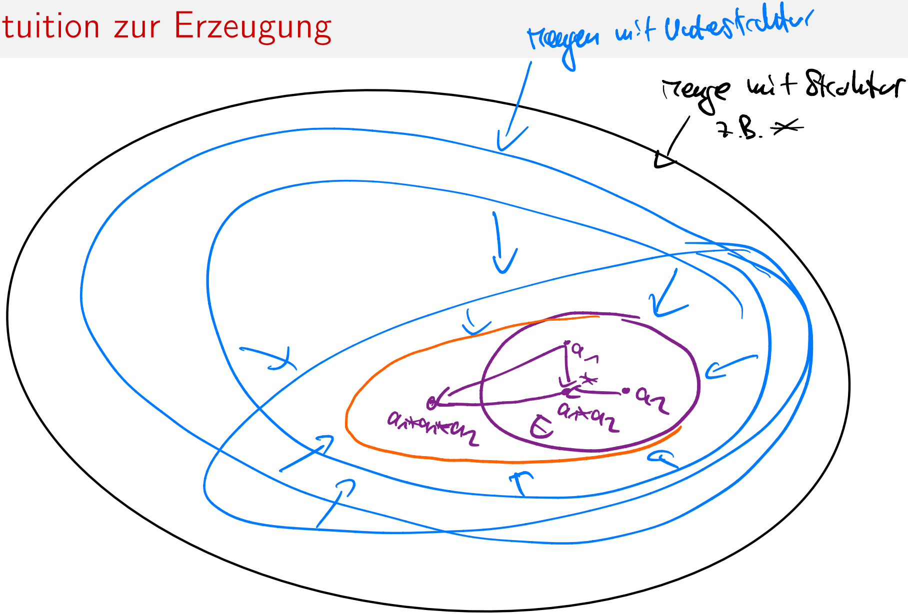
$\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$



$\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$



Intuition zur Erzeugung



Erzeugte Untergruppen

Definition

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Dann ist die von $E \subseteq G$ **erzeugte Untergruppe**

$$\langle E \rangle := \bigcap \{ U \,|\, (U, \star) \text{ ist Untergruppe von } (G, \star) \text{ und } E \subseteq U \}$$
$$= \{ a_1 \star \ldots \star a_n \,|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (a_i \in E \cup E') \}$$

z.B. In $(\mathbb{Z}, +)$ ist $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z} = \{ z \in \mathbb{Z} \,|\, z \text{ ist gerade} \}$ $(E = \{2\}, E' = \{-2\})$

$n=0$ $\quad 0$ $\quad$ Redundanz möglich

$n=1$ $\quad 2, -2$

$n=2$ $\quad 2+2,\; 2+(-2),\; (-2)+2,\; (-2)+(-2) \rightsquigarrow 4, 0, -4$

$n=3$ $\quad 2+2+2,\; 2+2+(-2) \ldots \rightsquigarrow 6, 2, 2, \ldots$

$\vdots$

Erzeugte Unterräume

Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann ist der von $E \subseteq V$ **erzeugte Unterraum**

$$\langle E \rangle := \bigcap \{ U \mid (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \}$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \forall i = 1, \ldots, n \ \overbrace{(v_i \in E,\ \alpha_i \in K)}^{\text{Inverse: } -1 \cdot v = -v} \Big\}$$

Zusätzlicher skalare Multiplikation

$\Sigma \mathrel{\hat=} * \ldots *$

z.B. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

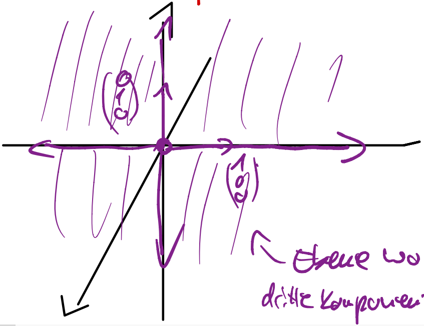
$\langle E \rangle = \{ \qquad \}$

$n = 0$ $\quad 0$ ✓

$n = 1$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

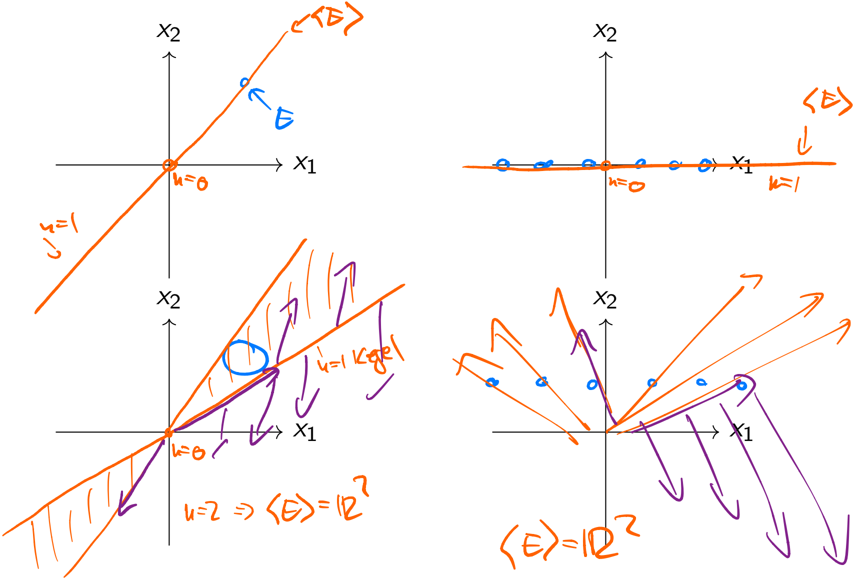
$n = 2$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\vdots$



Ebene wo dritte Komponente 0 ist

Visualisierung von Erzeugung in $\mathbb{R}^2$ Wie sieht $\langle E \rangle$ aus?



Erzeugung in weniger intuitiven Vektorräumen

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge.

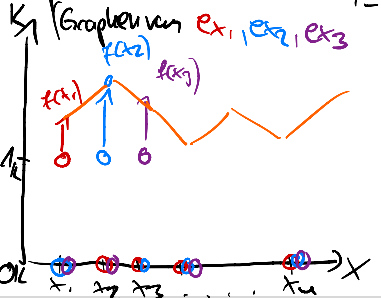
$$E = \{e_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\} \quad e_{x_i}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bildet ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(K^X, \underline{\underline{+}}, \underline{\underline{\cdot}})$ über K

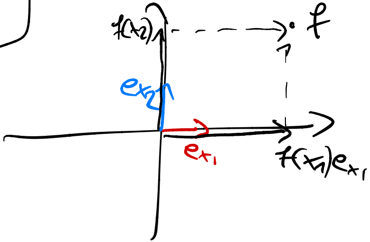
Genauer: Jedes $f \in K^X$ kann als $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}$ geschrieben werden $(n \in \mathbb{N}_0, \alpha_i \in K)$

$$f = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(x_i)}_{\in K} \underbrace{e_{x_i}}_{\in K^X}$$

Graphenansicht



Vektoransicht für $X = \{x_1, x_2\}$



Familien statt Mengen

Definition

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V. Dann heißt

$$\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U \}$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_{i_j} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall j = 1, \ldots, n \; \exists i_j \in I \; (v_{i_j} \in F, \; \alpha_j \in K) \right\}$$

der von F **erzeugte Unterraum**.

Wie für Mengen, aber Elemente können doppelt vorkommen.

doppelt

$$F = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \Big), \quad \{ v_i \mid i \in I \} = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Trotzdem immer $\langle F \rangle = \langle \{ v_i \mid i \in I \} \rangle$ wegen der Distributivgesetze.

Lemma

Es sei $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum. Dann sind $(\mathcal{P}(V),\subseteq)$ und $(\{\overbrace{U\in\mathcal{P}(V)\mid U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V}^{R:=}\}, \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq})$ partiell geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass die Hüllenbildung $\langle\cdot\rangle\colon \mathcal{P}(V)\to\mathcal{P}(V)$ ein **Ordnungshomomorphismus** ist, also dass für $E,F\in\mathcal{P}(V)$ gilt:

$$E\subseteq F \;\Rightarrow\; \langle E\rangle \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} \langle F\rangle$$

Beweis. Es ist $F\subseteq\langle F\rangle$, also $E\subseteq F\subseteq\langle F\rangle \Rightarrow E\subseteq\langle F\rangle$

$$\langle E\rangle := \bigcap\{\underbrace{U\in R\mid E\subseteq U}_{\langle F\rangle\in}\} \Rightarrow \langle E\rangle\subseteq\langle F\rangle$$

$\square$

Ein Resultat zur linearen Hülle

Lemma

Es sei V ein Vektorraum und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen $B_i \subseteq V$. Dann gilt:

$$\left\langle \bigcup_{i\in I} B_i \right\rangle = \left\langle \bigcup_{i\in I} \langle B_i \rangle \right\rangle$$

Beweis. „$\subseteq$" $B_i \subseteq \langle B_i \rangle\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \langle B_i \rangle$ und lin Hülle ist Ordnungshomomorphismus

„$\supseteq$" Darstellung als LK liefert $v \in \left\langle \bigcup_{i\in I} \langle B_i \rangle \right\rangle \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \dots, v_n$ aus $\langle B_{i_k} \rangle_{k=1,\dots,n}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ aus K s.d.

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{m_k} \beta_{\ell k} w_{\ell k} \right)}_{\substack{v_k \\ \in \langle B_{i_k} \rangle}} \overset{\text{Dist.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m_k} \underbrace{\alpha_k \beta_{\ell k}}_{\in K} \underbrace{w_{\ell k}}_{\in B_{i_k}} \in \left\langle \bigcup_{i\in I} B_i \right\rangle$$

$\square$

Exkurs Hüllenoperatoren und Abschlusssysteme

Hüllenoperatoren

z.B. Alle Linearkombinationen von Elementen aus E

Ist V Menge heißt $H\colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ **Hüllenoperator**, wenn gilt:

$$E \subseteq H(E) \qquad H \text{ ist extensiv,}$$

$$E \subseteq F \Rightarrow H(E) \subseteq H(F) \qquad H \text{ ist monoton (bzgl. Mengeninklusion),}$$

$$H(E) = H(H(E)) \qquad H \text{ ist idempotent,}$$

Bijektive Bez.

$\mathcal{X} := \{Y \in \mathcal{P}(V) \mid H(Y) = Y\}$

$H(E) := \bigcap \{Y \in \mathcal{X} \mid E \subseteq Y\}$

Abschlusssysteme

z.B. Alle Unterräume eines Vektorraums

Eine Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(V)$ heißt **Abschlusssystem**, wenn gilt:

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \bigcap \mathcal{Y} \in \mathcal{X}.$$