Bitte nehmen Sie an der Evaluation teil!
Bitte nutzen Sie auch die Freitextfelder!

Lineare Algebra I

Woche 08

05.12.2023 und 07.12.2023

Vektorraum

α, β Elemente von K heißen Skalare.

u, v Elemente von V heißen Vektoren.

Definition

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Ein **Vektorraum** $(V, \oplus, \odot)$ **über** K ist eine Menge V mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus \colon V \times V \to V$ Addition
- einer **äußeren Verknüpfung** $\odot \colon K \times V \to V$ skalare Multiplikation

1. $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

   neutrales Element 0_V

2. Es gilt das **Assoziativgesetz**

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$$

Vektorraum

Definition

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Ein **Vektorraum** $(V, \oplus, \odot)$ **über** K ist eine Menge V mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus \colon V \times V \to V$
- einer **äußeren Verknüpfung** $\odot \colon K \times V \to V$

3. Es gelten die **Distributivgesetze**

$\oplus$ in V

$+$ in K

$$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$
$$(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$$

4. Das neutrale Element 1_K bzgl. $\cdot$ in K ist auch neutral bzgl. $\odot$:

$$1_K \odot v = v.$$

Beispiel $(V, \oplus, \odot) = (K, +, \cdot)$

1. Jeder Körper $(K, +, \cdot)$, ausgestattet mit den Verknüpfungen $\oplus := +$ und $\odot := \cdot$, ist ein Vektorraum über sich selbst.

   $(V, \oplus) = (K, +)$ ist abelsche Gruppe ✓ $0_V = 0_K$

   $\odot : K \times V \to V$ ist identisch zu $\cdot : K \times K \to K$, damit assoziativ. ✓

   Distributivgesetze gelten und fallen zusammen ✓

   1_K ist neutral bzgl. $\odot \equiv \cdot$

2. Allgemeiner ist jeder Körper $(K, +, \cdot)$ ein Vektorraum über jedem seinem Unterkörper $(U, +, \cdot)$.

   $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Vektorraum über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

   $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ —"— über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Beispiel

3. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

   Die Menge

   $$K_n := \{\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{n\text{-Tupel}} \,|\, x_i \in K \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

   mit der **komponentenweisen Addition** $0_{K_n} = (0, \ldots, 0)$

   $$(x_1, \ldots, x_n) \oplus (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

   und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

   $$\alpha \odot (x_1, \ldots, x_n) := (\alpha \cdot x_1, \; \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

   heißt der **Vektorraum der Zeilenvektoren** über K der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

 Standardvektorraum über K^n

Beispiel

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

Die Menge

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

mit der **komponentenweisen Addition** und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$$

heißt der **Vektorraum der Spaltenvektoren** über K der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

Vektorraum

K^X ist kein Körper! Woche 07, Folie 4

Beispiel

5. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine Menge.

   Die Menge $K^X = \{f \mid f \colon X \to K\}$ mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\underset{K}{\alpha} \odot \underset{K^X}{f})(x) := \alpha \cdot f(x)$$

entspricht pkt.weisen Multipl. mit der konstanten Fkt. $x \mapsto \alpha$

   ist ein Vektorraum über K.

$X = \emptyset$: K^X ist einelementig (leere Fkt = Nullvektor)

$X = \mathbb{N}$: Menge der K-wertigen Folgen

 $(K[t], +, \cdot)$ ist kein Körper.

Beispiel

6. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[t]$ der Polynomring.

   Dann ist $K[t]$ mit der **Addition**

$$p \oplus q := \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) \cdot t^i$$

wie in $(K[t], +)$

   und der **skalaren Multiplikation**

$$\underset{K}{\alpha} \odot \underset{K[t]}{p} := \sum_{i=0}^{m} \alpha \cdot a_i \cdot t^i$$

entspricht der Multipl. von Polynomen mit dem konst. Polynom α

   der **Polynomraum** über K.

Lemma

VOK

1. $0_K \odot v = 0_V = v \odot 0_K$
2. $\alpha \odot 0_V = 0_V$

Beweis. ①: $0_V \oplus \underline{0_K \odot v} = 0_K \odot v = (0_K + 0_K) \odot v$

$= 0_K \odot v \oplus \underline{0_K \odot v}$, kürzen in $(V, \oplus)$: $0_V = 0_K \odot v$

Rest analog bzw. klar wegen $v \odot \alpha := \alpha \odot v$.

② $\underline{\alpha \odot 0_V} \oplus 0_V = \alpha \odot 0_V = \alpha \odot (0_V \oplus 0_V)$

$= \underline{\alpha \odot 0_V} \oplus \alpha \odot 0_V$, kürzen in $(V, \oplus)$: $0_V = \alpha \odot 0_V$.

Lemma

3. $\alpha \odot v = 0_V \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0_K$ oder $v = 0_V$

add. Inverse zu v in $(V, \oplus)$

4. $\alpha \odot (\ominus v) \overset{!!}{=} \ominus (\alpha \odot v) \overset{!}{=} (-\alpha) \odot v$

Beweis. ③ Es seien $\alpha \in K$, $v \in V$ und $\alpha \odot v = 0_V$.

Weiter sei $\alpha \neq 0_K$. Dann: $v = 1_K \odot v = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \odot v$

$= \alpha^{-1} \odot (\alpha \odot v) = \alpha^{-1} \odot 0_V \overset{②}{=} 0_V$.

④ bzw prüfen ist: $[(-\alpha) \odot v] \oplus [\alpha \odot v] = 0_V$.

$[(-\alpha) \odot v] \oplus [\alpha \odot v] = [-\alpha + \alpha] \odot v = 0_K \odot v \overset{①}{=} 0_V$

!! Weiter ist: $(-\alpha) \odot v = [(-1_K) \cdot \alpha] \odot v = [\alpha \cdot (-1_K)] \odot v$

Lemma 9.3

$= \alpha \odot [(-1_K) \odot v] = \alpha \odot [\ominus (1_K \odot v)] = \alpha \odot [\ominus v]$

Definition

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$ und $E \subseteq V$.

Ein Vektor der Form

Es ist erlaubt, denselben Vektor mehrfach zu verwenden.

endlich viele

$$\alpha_1 \odot v_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot v_n \quad \text{oder kurz} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \odot v_j$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und

$n = 0$: Ergebnis ist 0_V (selbst wenn $E = \emptyset$)

- **Koeffizienten** $\alpha_j \in K$
- Vektoren $v_j \in E$

heißt eine **Linearkombination der Menge** E.

Linearkombination

Beispiel

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkomb. der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \underbrace{3 \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \oplus \underbrace{(-7) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkomb. der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{31}{6} \odot \underset{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \oplus \frac{-11}{6} \odot \underset{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Die Koeffizienten wurden über ein lineares Gleichungssystem bestimmt (Kapitel 4)

Beispiel

3. Die Funktion

$$x \mapsto (\sin x) \ominus \sqrt{2} \odot (\cos x)$$

ist eine Linearkombination der Menge $\{\sin, \cos\}$ in $\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$.

4. Das Polynom

Koeff. bzgl. t ist null

$$p = 3t^2 \oplus 5$$

6

ist eine Linearkombination der Menge $\{t^2, t, 1\}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

5. Das Polynom

$$p = \ominus 2t^3 \oplus t^2 \oplus 1$$

ist keine Linearkombination der Menge $\{t^2, t, 1\}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

Unterraum

Definition

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

1. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Unter(vektor)raum** von $(V, \oplus, \odot)$,
   - wenn U bzgl. $\oplus$ abgeschlossen ist $U \oplus U \subseteq U$

     $K \odot U \subseteq U$
   - und wenn U bzgl. $\odot$ mit Elementen in K abgeschlossen ist
   - und wenn $(U, \oplus, \odot)$ selbst wieder ein Vektorraum ist.

   äquivalent: $(U, \oplus)$ Untergruppe von $(V, \oplus)$

   und $K \odot U \subseteq U$
2. Ein Unterraum $(U, \oplus, \odot)$ von $(V, \oplus, \odot)$ heißt **echt**, wenn $U \subsetneq V$ gilt.

Unterraumkriterium

Satz

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, \oplus, \odot)$ ist ein Unterraum von $(V, \oplus, \odot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
   $u \oplus v \in U$ $\quad \alpha \odot u \in U$
   $\oplus$ und $\odot$ einzeln prüfen
3. $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.
   $\underbrace{\alpha \odot u \oplus \beta \odot v \in U}_{\text{beliebige LK von zwei Vektoren}}$
   $\oplus$ und $\odot$ gemeinsam prüfen

Beweis. ① $\Rightarrow$ ②

$(U, \oplus)$ ist Gruppe, also Untergruppe von $(V, \oplus)$. Damit ist $0_V \in U$, und damit $U \neq \emptyset$. Abgeschlossenheit von $(U, \oplus)$ ist gerade $U \oplus U \subseteq U$. Abgeschlossenheit von U bzgl. $\odot$ zeigt $K \odot U \subseteq U$.

Unterraumkriterium

Satz

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, \oplus, \odot)$ ist ein Unterraum von $(V, \oplus, \odot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
3. $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.

Beweis. ② ⇒ ①: $\oplus : U \times U \to U$ und $\odot : K \times U \to U$ sind als Einschränkungen wohldefiniert. Assoziativität, Distributivität, Neutralität von 1_K bleiben erhalten. Zu zeigen ist noch: $(U, \oplus)$ ist Untergruppe von $(V, \oplus)$. UG-Kriterium: $K \odot U \subseteq U$ nach Voraussetzung. $\ominus U = (-1_K) \odot U \subseteq K \odot U \subseteq U$
$U \ominus U \subseteq U \oplus U \subseteq U$.

Satz

Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, \oplus, \odot)$ ist ein Unterraum von $(V, \oplus, \odot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
3. $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.

Beweis. $2 \Rightarrow 3$: $K \odot U \subseteq U \Rightarrow K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U \oplus U \subseteq U$.

$3 \Rightarrow 2$: $U \oplus U = 1 \odot U \oplus 1 \odot U \subseteq K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$

$K \odot U = K \odot U \oplus \{0\} \odot U \subseteq K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$

Unterraum

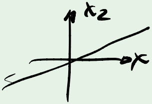
Beispiel

1. Es sei $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

   Dann sind

   - $(\{0_V\}, \oplus, \odot)$ Nullraum
   - $(V, \oplus, \odot)$

   die **trivialen Unterräume** von $(V, \oplus, \odot)$.

2. 

   ist Unterraum

   $$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 - 2\,x_2 = 0 \right\}$$ von $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

UR-Kriterium: $U \neq \emptyset$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U$

$(x_1 + y_1) - 2 \cdot (x_2 + y_2) = (x_1 - 2 \cdot x_2) + (y_1 - 2 \cdot y_2)$

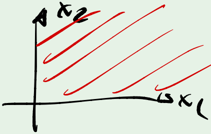
$= 0 + 0 = 0$. Weiter: $\alpha x_1 - 2 \alpha x_2 = \alpha (x_1 - 2 x_2) = 0$.

Unterraum

Beispiel

3. $$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 - 2\,x_2 = 1 \right\}$$ von $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

ist kein Unterraum, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$.

4. 

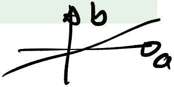
$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \right\}$$

$U \oplus U \subseteq U$, aber $-1 \odot U \not\subseteq U$, Beispiel $(-1) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} \notin U$

5. $U = \{ a + bi \in \mathbb{C} \mid a - 2b = 0 \}$

ist Unterraum von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

ist kein UR von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{C}, +, \cdot)$



Vereinfachung der Notation

1. Wir schreiben $+$ an Stelle von $\oplus$.
2. Wir schreiben $\cdot$ an Stelle von $\odot$ oder lassen es sogar weg.
3. Wir schreiben 0 an Stelle von 0_K und auch an Stelle von 0_V.
4. Wir schreiben 1 an Stelle von 1_K.
5. Wir nennen den zugrundeliegenden Körper eines Vektorraumes nur bei Bedarf.

Durchschnitt von Unterräumen

Lemma

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)$ eine Familie von Unterräumen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$.

Beweis. Hausaufgabe

Definition

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E \subseteq V$.

Dann heißt kleinster UR von V, der E enthält!

$$\langle E \rangle := \bigcap \{ U \mid (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \}$$

- der von E **erzeugte Unterraum**
- oder die **lineare Hülle** $\operatorname{Lin}(E)$ von E
- oder auch der **Spann** $\operatorname{Span}(E)$ von E

in $(V, +, \cdot)$.

- $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ endlich: $\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle$ auch $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$
- E heißt Erzeugendensystem von V, wenn $\langle E \rangle = V$

Darstellung des erzeugten Unterraumes

Satz

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$ und $E \subseteq V$.

Dann gilt für den von E erzeugten Unterraum:

$$\langle E \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \;\Big|\; \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \Big\}.$$

- D.h. $\langle E \rangle$ besteht genau aus den Linearkombinationen von E !!
- $n = 0$: Die leere LK ergibt immer 0_V.
- $E = \emptyset$: $\Rightarrow \langle E \rangle = \{0\}$ Nullraum.

Darstellung des erzeugten Unterraumes

vgl. Woche 05 Folien 11–13

$$\langle E \rangle := \bigcap \overbrace{\big\{ U \,\big|\, (U,+,\cdot) \text{ ist Unterraum von } (V,+,\cdot) \text{ und } E \subseteq U \big\}}^{R} = \bigcap R$$

$$M := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1,\ldots,n \; (v_i \in E,\; \alpha_i \in K) \Big\}$$

Menge aller LK von E

Beweis. $M \subseteq \langle E \rangle$: Es sei $U \in R$ beliebig.
Da $E \subseteq U$ und U ein UR von V ist, enthält U auch alle LK von E (Induktionsbeweis).
Also $M \subseteq U$. U ist beliebig in R.
$\Rightarrow M \subseteq \bigcap R = \langle E \rangle$.

Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle E \rangle := \bigcap \overbrace{\{ U \mid (U,+,\cdot) \text{ ist Unterraum von } (V,+,\cdot) \text{ und } E \subseteq U \}}^{R}$$

$$M := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (v_i \in E, \; \alpha_i \in K) \Big\}$$

Beweis. $\langle E \rangle \subseteq M$:

- M ist UR von V: Nutze das UR-Kriterium: $M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$. Sind $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ und $\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i$ beide in M, dann auch die Summe $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i \in M$ und Vielfache $\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) v_i \in M$, d.h. M ist UR ✓
- Weiter ist $E \subseteq M$, d.h. $M \in R \Rightarrow \langle E \rangle = \bigcap R \subseteq M$.

Beispiel

1. $E = \{1, t, \ldots, t^n\}$ im Polynomraum $K[t]$ über einem Körper K

$$\langle E \rangle = K_n[t] = \text{Polynome vom Höchstgrad } n.$$

2. $E = \{1, t, t^2, \ldots\}$ im Polynomraum $K[t]$ über einem Körper K

$$\langle E \rangle = K[t] = \text{alle Polynome}$$

Beispiel

3. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Menge. Die Menge

$$E = \{\mathbb{1}_{x_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

mit char. Funktionen $\mathbb{1}_{x_i}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

bildet ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $(K^X, +, \cdot)$:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i)}_{\in K} \cdot \mathbb{1}_{x_i}$$

Beispiel

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine beliebige Menge. Die Menge

$$E = \{ 1_x \mid x \in X \}$$

erzeugt den Unterraum

$$\langle E \rangle = \{ f : X \to K \mid f(x) = 0 \text{ bis auf endliche viele Stellen } x \in X \}$$

kann Vektoren mehrfach entha

Definition

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

Ein Vektor der Form

Es ist erlaubt, denselben Index aus I mehrfach zu wählen.

$$\alpha_1 \odot v_{\cancel{1}\, i_1} \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot v_{\cancel{n}\, i_n} \quad \text{oder kurz} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \odot v_{i_j}$$

Im Fall $I = \emptyset$ (leere Familie) ist nur $n=0$ (leere LK) möglich mit Ergebnis 0 (Nullvektor).

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und

- **Koeffizienten** $\alpha_j \in K$
- Vektoren $v_{i_j} \in E$ mit Indizes $i_j \in I$

heißt eine **Linearkombination der Familie F**.

Familien statt Mengen

Definition

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

Dann heißt

$$\langle F \rangle := \bigcap \Big\{ U \,\Big|\, (U,+,\cdot) \text{ ist Unterraum von } (V,+,\cdot) \text{ und } \underbrace{\{v_i \mid i \in I\} \subseteq U}_{\text{U enthält die Elemente der Familie F als Menge}} \Big\}$$

- der von F **erzeugte Unterraum**
- oder die **lineare Hülle** $\operatorname{Lin}(F)$ von F
- oder auch der **Spann** $\operatorname{Span}(F)$ von F

in $(V,+,\cdot)$.

Es gilt $\langle F \rangle$ besteht also genau aus den Linearkombinationen von F.

$$\langle F \rangle = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_{i_j} \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall j = 1, \ldots, n \; \exists i_j \in I \; (v_{i_j} \in F, \; \alpha_j \in K) \Big\}.$$