Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 07

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	5	14.71%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	2.94%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	1	2.94%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	27	79.41%
Gesamt(Brutto)	**34**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	1	2.94%
Keine Antwort	6	17.65%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	27	79.41%
Gesamt(Brutto)	**34**	**100.00%**

Gedämpftes Interesse an:

(1) Charakteristik von Ringen und Körpern
(2) Zerlegung von Polynomen
(3) Fundamentalsatz
(4) Aufgabe 7.5 (Zerlegung reeller Polynome)

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen
(2) Polynome als Ringerweiterung motivieren
(3) „Identifikation“ von Polynomen formalisieren
(4) Zusammenhang von Polynomfunktion, Zerlegung und Nullstellen wiederholen

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick
(2) Ringerweiterung bauen
(3) Äquivalenzrelation auf Polynomen untersuchen
(4) Etwas mehr zu Nullstellen in Ringen.
(5) Polynome in mehreren Variablen einführen oder Hausaufgabe 7.5.

Wochenüberblick

Charakteristik in Ringen (und Körpern)

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins 1_R. Dann ist

$$\operatorname{char}(R) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n\,1_R = 0_R\}$$

oder 0, wenn das Minimum nicht existiert.

(1) Unterringe von R haben die gleiche Charakteristik.

(2) Ist $f : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus, dann $\operatorname{char}(R_2) \mid \operatorname{char}(R_1)$.

(3) Ist R ein Körper, dann ist $\operatorname{char}(R) = 0$ oder Primzahl.

(4) Ist $\operatorname{char}(R)$ prim, dann ist $r \mapsto r^{\operatorname{char}(R)}$ Ringendomorphismus.

(5) $\operatorname{char}(R)r = 0_R$ für alle $r \in R$

Anatomie eines Polynoms

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k =$$

Polynome als „Ringerweiterung“

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1.

Was passiert, wenn wir R zu $R \cup \{t\}$ für ein $t \notin R$ erweitern wollen, ohne die Struktureigenschaften zu verlieren?

Polynomidentifikation

Welche der folgenden Polynome identifizieren wir miteinander?

(1) 0

(2) $0t^6$

(3) $1 + t^3$

(4) $t^3 + 0t^6 + 1t + 1$

(5) $t^2 + 1t^0$

(6) $1t^3 + 0t + 1$

(7) $t + t^3 + 1$

Polynomfunktion und Nullstellen

Definition

Es sei R ein kommutativer Ring, $p \in R[t]$ ein Polynom und $\widetilde{p} \colon R \to R$ die zugehörige Polynomfunktion.

$\lambda \in R$ heißt eine **Nullstelle** von p in R, wenn $\widetilde{p}(\lambda) = 0_R$ gilt.

Satz

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom, $p \neq 0_K$.

(1) Es existieren $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ sowie Exponenten $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ und $q \in K[t]$ ohne Nullstelle in K, sodass gilt:

$$p = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q.$$

(2) Die Nullstellen von p sind genau die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$.

Nullstellen einer Zerlegung in einem „Nichtstandardring“

Was sind die Nullstellen von

$$(\mathbb{N} \triangle \mathbb{Q} \cap t) \cap (\mathbb{Z} \triangle \mathbb{R} \cap t) \text{ in } (\mathcal{P}(\mathbb{C})[t], \triangle, \cap)?$$

Nullstellen von $t^2 + 1$, Ergänzung der Vorlesungsbeispiele

(1) $p = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ besitzt keine Nullstelle, weil für die Polynomfunktion $\widetilde{p}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\widetilde{p}(t) = t^2 + 1 \geqslant 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) $p = t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$ besitzt genau die beiden Nullstellen i und $-i$.

(3) $p = t^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[t]$ besitzt genau die beiden Nullstellen 2 und 3.

(4) $p = t^2 + 1 \in (\mathcal{P}(\mathbb{R})[t], \triangle, \cap)$ besitzt

Größte gemeinsame Teiler in $\mathbb{N}$ – Euklidischer Algorithmus

Definition

Für $n, m \in \mathbb{N}$ sind die Teiler $D(n, m) := \{t \in \mathbb{N} \,|\, t \mid n \wedge t \mid m\}$ und

$$\mathrm{ggT}(n, m) := k \in D(n, m), \text{ so dass } t \mid k \ \forall t \in D(n, m).$$

Man kann ihn durch Division mit Rest bestimmen. Z. B. für 98 und 35:

Größte gemeinsame Teiler in $K[t]$ – Euklid. Algorithmus

Definition

Für $p, q \in K[t]$ sind die Teiler $D(p,q) := \{d \in K[t] \mid d \mid p \wedge d \mid q\}$ und

$$\operatorname{ggT}(p,q) := \{k \in D(p,q) \text{ höchsten Grades} \mid d \mid k \ \forall d \in D(p,q)\}.$$

Man kann sie durch Division mit Rest bestimmen. Z. B. für $p := t^3 - 1$ und $q := t^3 - t^2 + t - 1$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$

Hausaufgabe 7.5

Es sei $p \in (\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ mit $\deg(p) \geqslant 1$, dann existiert eine Zerlegung

$$p = q \cdot (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k) \cdot g_1 \dots g_\ell$$

mit Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ sowie reellen quadratischen Polynomen $g_1, \dots, g_\ell$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$.

Polynome über Polynomen

Polynome werden über Ringen definiert und formen dann einen Ring.
Wie sehen Polynome über Polynomen aus?

Polynome in mehreren Variablen

Wie könnte man Polynome in mehreren Variablen definieren?