Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 07

Link zu diesen Folien

Evaluationen sind eröffnet

→ Bitte teilnehmen

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	5	14.71%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	2.94%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	1	2.94%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	27	79.41%
Gesamt(Brutto)	**34**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	1	2.94%
Keine Antwort	6	17.65%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	27	79.41%
Gesamt(Brutto)	**34**	**100.00%**

Gedämpftes Interesse an:

(1) Charakteristik von Ringen und Körpern

(2) Zerlegung von Polynomen

(3) Fundamentalsatz

(4) Aufgabe 7.5 (Zerlegung reeller Polynome)

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Polynome als Ringerweiterung motivieren

(3) „Identifikation“ von Polynomen ~~formalisieren~~

(4) Zusammenhang von Polynomfunktion, Zerlegung und Nullstellen wiederholen

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Ringerweiterung bauen

(3) ~~Äquivalenzrelation auf Polynomen untersuchen~~

(4) Etwas mehr zu Nullstellen in Ringen.

(5) Polynome in mehreren Variablen einführen oder Hausaufgabe 7.5.

Wochenüberblick

Halbgruppen, Monoide → Gruppen (abelsch), $(G,+)$ mit 0

neue Verknüpfung "$\cdot$" & Distributivität

$(R,\cdot)$ Halbgruppe

$(R\setminus\{0\},\cdot)$ abelsche Gruppe

Ring $(R,+,\cdot)$

1_R, Kommutativität, Nullteilerfreiheit

Immer ein Integritätsring

Wenn $(R,\cdot)$ kommutativ mit $1\neq 0$ und alle $a\in R\setminus\{0\}$ in $(R,\cdot)$ invert.

Körper $(K,+,\cdot)$

$0\neq 1$, Unterkörper

Körperhomomorphismen

"Ring mit Eins" – Homomorph.

Polynomringe $(R[t],+,\cdot)$ über Ring $(R,+,\cdot)$ Bspl. $(\mathcal{P}(X)[t],\Delta,\cap)$ zu $(\mathcal{P}(X),\Delta,\cap)$

Gleiche Notation

Terme der Form $a_0t^0+a_1t^1+\ldots+a_nt^n$

- Addition koeffizientenweise, Multiplikation über Faltung

- Grad v. Pol., - Polynomdivision, Polynomfkt. → Nullstellen, Linearfaktoren Zerlegung
- Fundamentalsatz d. Algebra

Charakteristik in Ringen (und Körpern)

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins 1_R. Dann ist

$$\mathrm{char}(R) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n\,1_R = 0_R\} = \mathrm{ord}(1_R) \text{ in } (R,+)$$

oder 0, wenn das Minimum nicht existiert.

(1) Unterringe von R haben die gleiche Charakteristik.

Addition und 1_R werden vererbt

(2) Ist $f : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus, dann $\overbrace{\mathrm{char}(R_2)}^{p_2 :=} \mid \overbrace{\mathrm{char}(R_1)}^{p_1 :=}$.

$0_{R_2} = f(0_{R_1}) = f(p_1 1_R) = p_1 f(1_R) = p_1 1_{R_2} = (q \cdot p_2 + r) 1_{R_2} = r 1_{R_2} \Rightarrow r = 0$

(3) Ist R ein Körper, dann ist $\mathrm{char}(R) = 0$ oder Primzahl.

$\mathrm{char}(R) = n \cdot m \Rightarrow 0 = (n \cdot m) 1_R = n(m 1_R) \Rightarrow \mathrm{char}(R) = m < \mathrm{char}(R)$ oder $\mathrm{char}(R) = n < \mathrm{char}(R)$ $\lightning$

(4) Ist $\mathrm{char}(R)$ prim, dann ist $r \mapsto r^{\mathrm{char}(R)}$ Ringendomorphismus.

(5) $\mathrm{char}(R) r = 0_R$ für alle $r \in R$

$\mathrm{char}(R) r = \mathrm{char}(R)(1_R \cdot r) = \underbrace{\mathrm{char}(R) 1_R}_{0_R} \cdot r = 0_R$

Anatomie eines Polynoms

i.A. nicht deg

'Potenzen'

Grad des Pol

$\neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k = a_0 t^0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \ldots + a_{\deg} t^{\deg} + 0_K t^{\deg+1} + \ldots + 0_K t^n$$

Koeffizienten

Monome

Polynome der Form $p = a t^0$ heißen konstant. Achtung!

Konstantes Polynom $\Rightarrow$ Konstante Polynomfunktion

Konstante Polynomfkt $\not\Rightarrow$ Konstantes Polynom

Polynome als „Ringerweiterung“

Es sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1.

Was passiert, wenn wir R zu $R \cup \{t\}$ für ein $t \notin R$ erweitern wollen, ohne die Struktureigenschaften zu verlieren?

Welche Elemente ergeben sich, wenn die Ringstruktur erhalten bleiben soll?

t selbst, t^k $k \in \mathbb{N}$, $\ell t^k = \ell(1 \cdot t^k) = \underbrace{(\ell 1)}_{\in R} \cdot t^k$ $\ell \in \mathbb{N}$

Also $a \cdot t^k$ $\forall k \in \mathbb{N}, a \in R$ deckt das ab

(0 muss neutral bleiben $0 \cdot t^k = 0$)

Addition dieser Elemente liefert Summen der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ $\forall a_k, k \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow$ Gerade die formalen Polynome.

Wenn R keine 1 hat, kann man sich an orientieren.

Polynomidentifikation

Welche der folgenden Polynome identifizieren wir miteinander?

Darstellung als Koeffizientenfolge

(1) 0 $\hat{=} (0, \dots)$

(2) $0t^6$ $\hat{=} (0, \dots)$

(3) $1 + t^3$ $\hat{=} (1, 0, 0, 1, 0, \dots)$

(4) $t^3 + 0t^6 + 1t + 1$ $\hat{=} (1, 1, 0, 1, 0, \dots)$

(5) $t^2 + 1t^0$ $\hat{=} (1, 0, 1, 0, \dots)$

(6) $1t^3 + 0t + 1$ $\hat{=} (1, 0, 0, 1, 0, \dots)$

(7) $t + t^3 + 1$ $\hat{=} (1, 1, 0, 1, 0, \dots)$

Formale/Notationelle Identifikation:

- t^0 darf weggelassen werden
- t^1 ist t
- Reihenfolge der Potenzen in der Summe ist egal
- $a_n = 0 \Rightarrow a_n t^n$ darf weggelassen werden

Polynomfunktion und Nullstellen

Definition

Es sei R ein kommutativer Ring, $p \in R[t]$ ein Polynom und $\widetilde{p}\colon R \to R$ die zugehörige Polynomfunktion.

$\lambda \in R$ heißt eine **Nullstelle** von p in R, wenn $\widetilde{p}(\lambda) = 0_R$ gilt.

Nullstellen sind über Polynomfkt. definiert

Satz

Wechsel auf Körper als unterl. Ring, ab Teile

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom, $p \neq 0_K$.

(1) Es existieren $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ sowie Exponenten $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ und $q \in K[t]$ ohne Nullstelle in K, sodass gilt:

$$p = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q.$$

(2) Die Nullstellen von p sind genau die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$.

Nullstellen einer "Zerlegung" in einem „Nichtstandardring"

Was sind die Nullstellen von

$(a+bt) \cdot (c+dt)$

$p := (\mathbb{N} \triangle \mathbb{Q} \cap t) \cap (\mathbb{Z} \triangle \mathbb{R} \cap t)$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{C})[t], \triangle, \cap)$?

$NS_1: \{\mathbb{N} \cup A \mid A \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}\}$ $\qquad$ $NS_2: \{\mathbb{Z} \cup A \mid A \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$

$$p = \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \triangle (\mathbb{N} \cap \mathbb{R} \triangle \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}) \cap t \triangle (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}) \cap t^2$$

$$= \mathbb{N} \triangle (-\mathbb{N}_0) \cap t \triangle \mathbb{Q} \cap t^2$$

$$\hat{p} = \mathbb{N} \triangle (-\mathbb{N}_0 \triangle \mathbb{Q}) \cap t = \mathbb{N} \triangle \mathbb{Q} \setminus -\mathbb{N}_0 \cap t$$

$$NS: \{\mathbb{N} \cup A \mid A \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \cup -\mathbb{N}_0\} \ni \mathbb{N} \cup \{0\} \notin NS_1 \cup NS_2$$

Nullstellen sind dazugekommen!?

Anderes Bspl: $\mathbb{N}$, $-\mathbb{N}$ (konstante Polynome ohne NS)

$\mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \emptyset$ ist das Nullpolynom

Nullstellen von $t^2 + 1$, Ergänzung der Vorlesungsbeispiele

(1) $p = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ besitzt keine Nullstelle, weil für die Polynomfunktion $\widetilde{p}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\widetilde{p}(t) = t^2 + 1 \geqslant 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) $p = t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$ besitzt genau die beiden Nullstellen i und $-i$.

(3) $p = t^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[t]$ besitzt genau die beiden Nullstellen 2 und 3.

(4) $p = t^2 + 1 \in (\mathcal{P}(\mathbb{R})[t], \triangle, \cap)$ besitzt die einzige Nullstelle $\mathbb{R}$.

$$t^2 \triangle \mathbb{R} \overset{!}{=} \emptyset \Leftrightarrow t^2 = \mathbb{R} \Leftrightarrow t = \mathbb{R}$$

Definition

Für $n, m \in \mathbb{N}$ sind die Teiler $T(n,m) := \{t \in \mathbb{N} \mid t \mid n \wedge t \mid m\}$ und

$$\mathrm{ggT}(n,m) := k \in T(n,m), \text{ so dass } t \mid k \ \forall t \in T(n,m).$$

Man kann ihn durch Division mit Rest bestimmen. Z. B. für 98 und 35:

$98 = (35) \cdot 2 + 28$

$\underline{70}$

28

$35 = (28) \cdot 1 + 7$

$\underline{28}$

7

$28 = 7 \cdot 4 + 0$

$\underline{28}$

0

7 teilt 98

$\Uparrow$

7 teilt 35

$\Uparrow$

7 teilt 28

7 ist Teiler

$d \in D(98,35) \Rightarrow d \mid 28$

$\Downarrow$

$d \in D(35,28) \Rightarrow d \mid 7$

7 ist ggT

Größte gemeinsame Teiler in $K[t]$ – Euklid. Algorithmus

Definition

Für $p, q \in K[t]$ sind die Teiler $T(p,q) := \{t \in K[t] \mid t \mid p \wedge t \mid q\}$ und

Bis auf invertierbare Konstanten bestimmt

$\mathrm{ggT}(p,q) := \{k \in T(p,q)$ höchsten Grades $\mid t \mid k \ \forall t \in T(p,q)\}$.

Man kann sie durch Division mit Rest bestimmen. Z. B. für $p = t^3 - 1$ und $q := t^3 - t^2 + t - 1$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$

$$t^3 - t^2 + t - 1 = (t^3 - 1)\cdot 1 + (-t^2 + t)$$

$$\begin{array}{l} t^3 - 1 \\ \hline -t^2 + t \end{array}$$

$$t^3 - 1 = (-t^2 + t)\cdot(-t - 1) + (t - 1)$$

$$\begin{array}{l} t^3 - t^2 \\ \hline t^2 - 1 \\ t^2 - t \\ \hline t - 1 \end{array}$$

$$(-t^2 + t) = (t-1)(-t) + 0$$

$$\begin{array}{l} -t^2 + t \\ \hline 0 \end{array}$$

$(t-1)$ teilt $t^3 - t^2 + t - 1$

$\Uparrow$

$(t-1)$ teilt $(t^3 - 1)$

$\Uparrow$

$(t-1)$ teilt $(-t^2 + t)$

$d \in T(p,q) \Rightarrow d \mid (-t^2 + t)$

$\Downarrow$

$d \in (p, -t^2 + t) \Rightarrow d \mid (t-1)$

$(t-1)$ ist ggT

ggT liefert gerade die gemeinsamen Nullstellen!

Hausaufgabe 7.5

Es sei $p \in (\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ mit $\deg(p) \geqslant 1$, dann existiert eine Zerlegung

$$p = q \cdot (t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)\cdot g_1 \dots g_\ell$$

mit Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ sowie reellen quadratischen Polynomen $g_1, \dots, g_\ell$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$ gilt: $p(\bar z) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\bar z)^i = \sum a_i \overline{(z^i)} = \sum \bar a_i \cdot \overline{(z^i)} = \sum \overline{a_i z^i} = \overline{\sum a_i z^i} = \overline{p(z)}$

Also für jede Nullstelle λ: $p(\lambda) = 0 = \bar 0 = p(\bar\lambda)$ $\Rightarrow$ $\bar z$ ist Nullstelle

In $\mathbb{C}$: $p = \underbrace{q}_{\in\mathbb{R}} \cdot (t-\tilde\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\tilde\lambda_s)^{n_s}$. Und $(t-\lambda)(t-\bar\lambda) = t^2 - \underbrace{(t+\bar t)}_{\in\mathbb{R}}\lambda + \underbrace{\lambda\bar\lambda}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[t]$

Also $p = \underbrace{q \cdot (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)\cdot g_1 \cdots g_\ell}_{\hat p \in \mathbb{R}[t]} \cdot (t-\tilde\lambda_{i_1})^{d_1} \cdots (t-\lambda_{i_m})^{d_m}$

Polynomdiv in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$

Polynomdiv in $\mathbb{R}[t]$ liefert $p = \hat q \cdot \hat p + r$ $\Rightarrow$ $\hat q = 1$, $r = 0$. $\square$

Polynome über Polynomen

Polynome werden über Ringen definiert und formen dann einen Ring. Wie sehen Polynome über Polynomen aus?

Wir haben $(R,+,\cdot) \to (R[t],+,\cdot) \to (R[t])[u],+,\cdot)$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k u^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n_k} a_{k,i} t^i\right)}_{p_k \text{ Darstellung}} u^k$$

p_k: Polynome in t $\in R[t]$

Addition und Multiplikation in $R[t][u]$ def. über

—— " —— in $R[t]$ def über

—— " —— in R

Polynome in mehreren Variablen

Wie könnte man Polynome in mehreren Variablen definieren? $R[t][u]$

Terme der Form $a_{00} + a_{10} t + a_{01} u + a_{11} tu + a_{21} t^2 u + \dots$

Allgemein $\sum_{k,i=0}^{n} a_{ki} t^k u^i$ und Addition/Multiplikation analog zum univariaten Fall

---

$f: (R[t])[u] \to R[t][u]$

$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n_k} a_{ki} t^i \right) u^k \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n_k} a_{ki} t^i u^k$ ist Ringisomorphismus